



# ESTIMATIVA BIDIMENSIONAL TRANSIENTE DE RESISTÊNCIAS TÉRMICAS DE CONTATO PELO MÉTODO DO FUNCIONAL DE RECIPROCIDADE

Camila Ribeiro de Lacerda

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: Marcelo José Colaço

Rio de Janeiro  
Março de 2018

ESTIMATIVA BIDIMENSIONAL TRANSIENTE DE RESISTÊNCIAS  
TÉRMICAS DE CONTATO PELO MÉTODO DO FUNCIONAL DE  
RECIPROCIDADE

Camila Ribeiro de Lacerda

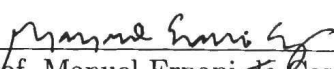
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

  
Prof. Marcelo José Colaço, D.Sc.

  
Prof. Albino José Kalab Leiroz, Ph.D.

  
Prof. Helcio Rangel Barreto Orlande, Ph.D.

  
Prof. Manuel Ernani de Carvalho Cruz, Ph.D.

  
Prof. Nilson Costa Roberty, D.Sc.

  
Dr. Carlos Frederico Trotta Matt, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
MARÇO DE 2018



Lacerda, Camila Ribeiro de

Estimativa bidimensional transiente de resistências térmicas de contato pelo método do funcional de reciprocidade/Camila Ribeiro de Lacerda. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

XX, 218 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Marcelo José Colaço

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Mecânica, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 169 – 174.

1. Condutância Térmica de Contato. 2. Funcional de Reciprocidade. 3. Problemas Inversos. I. Colaço, Marcelo José. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

*Ao César.*

*“O que prevemos raramente  
ocorre; o que menos esperamos  
geralmente acontece.”*

*Benjamin Disraeli*

*“Uma prova de que Deus esteja  
conosco não é o fato de que não  
venhamos a cair, mas que nos  
levantemos depois de cada  
queda.”*

*Santa Teresa de Ávila*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar forças.

Agradeço à minha família, pelo apoio, carinho e incentivo de sempre.

Agradeço ao meu orientador, Prof. Marcelo Colaço, pela amizade, paciência e por acreditar no meu potencial.

Agradeço ao César Pacheco pelo companheirismo, apoio e paciência em todos os momentos.

Agradeço aos professores e aos funcionários do Programa de Pós-Graduação da Engenharia Mecânica da COPPE, em especial à Vera Noronha, à Rosalia e aos funcionários do LMT.

Agradeço ao Prof. Luiz Abreu (IPRJ/UERJ) pela colaboração, cedendo as medidas experimentais utilizadas neste trabalho.

Agradeço aos amigos do LMT, do LTTC e do LabMEMS que tornaram essa caminhada mais alegre.

Agradeço aos meus amigos, aos que estavam sempre comigo e aos que mesmo de longe se mostraram presentes nesta jornada.

Agradeço ao CNPq e à FAPERJ pela ajuda financeira, através da bolsa de doutorado.

Agradeço a todos que contribuíram direta e indiretamente para a realização deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ESTIMATIVA BIDIMENSIONAL TRANSIENTE DE RESISTÊNCIAS  
TÉRMICAS DE CONTATO PELO MÉTODO DO FUNCIONAL DE  
RECIPROCIDADE

Camila Ribeiro de Lacerda

Março/2018

Orientador: Marcelo José Colaço

Programa: Engenharia Mecânica

Neste trabalho, considera-se um problema de condução de calor tridimensional, tanto em regime estacionário como transiente, onde dois materiais estão em contato não perfeito. Quatro metodologias baseadas no funcional de reciprocidade são apresentadas para a estimativa de perfis de condutância térmica de contato bidimensionais com e sem variação temporal. As metodologias consistem em duas etapas: primeiramente, dois problemas auxiliares, que não dependem da condutância térmica de contato, são resolvidos. Com a solução destes problemas, é possível obter o salto de temperatura e o fluxo de calor na interface dos materiais e, posteriormente, estimar a condutância térmica de contato. As medidas de temperatura são feitas de forma não intrusiva e três, das quatro metodologias apresentadas, são não iterativas. Medidas de temperatura reais e simuladas são consideradas, onde diferentes níveis de ruído são adicionados às medidas simuladas computacionalmente. Diferentes casos são analisados, obtendo boas estimativas para a condutância térmica de contato, até mesmo em casos onde há adição de ruídos, mostrando a eficiência das metodologias aplicadas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## ESTIMATE OF A TWO-DIMENSIONAL THERMAL CONTACT RESISTANCES USING THE RECIPROCITY FUNCTIONAL APPROACH

Camila Ribeiro de Lacerda

March/2018

Advisor: Marcelo José Colaço

Department: Mechanical Engineering

In this work, a three-dimensional heat conduction problem in both steady and transient state is considered, where two materials are in non-perfect contact. Four methodologies based on the reciprocity functional are presented for estimating two-dimensional thermal contact conductance profiles with and without temporal variation. The methodologies consist of two stages: in the first one, two auxiliary problems, that do not depend on the thermal contact conductance, are solved. After solving these problems, it is possible to obtain the temperature jump and the heat flux at the interface of the materials and thus estimate the thermal contact conductance. The temperature measurements are non-intrusive and three of the four methodologies presented are non-iterative. Real and simulated temperature measurements are considered where different levels of noise are added to the simulated measurements. Different cases are analyzed, yielding good estimates for the thermal contact conductance, even with the addition of noise, showing the efficiency of the applied methodologies.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xvii</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xviii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivação e Objetivos . . . . .	1
1.2 Organização do Trabalho . . . . .	3
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>4</b>
2.1 Resistência Térmica de Contato . . . . .	4
2.2 Problemas Inversos e Funcional de Reciprocidade . . . . .	9
<b>3 Problema Direto</b>	<b>15</b>
3.1 Formulação Matemática - Regime Permanente . . . . .	16
3.2 Formulação Matemática - Regime Transiente . . . . .	22
<b>4 Problema Inverso</b>	<b>29</b>
4.1 Base de Função Ortonormal . . . . .	30
4.2 Abordagem 1 . . . . .	31
4.2.1 Problemas Auxiliares . . . . .	31
4.2.2 Problemas Auxiliares Modificados . . . . .	36
4.3 Abordagem 2 . . . . .	43
4.3.1 Metodologia 1 . . . . .	43
4.3.2 Metodologia 2 . . . . .	49
4.4 Abordagem 3 . . . . .	55
4.5 Estimativa do fluxo de calor . . . . .	63
4.6 Código Computacional . . . . .	68
<b>5 Resultados</b>	<b>70</b>
5.1 Abordagem 1 . . . . .	70
5.2 Abordagem 2 . . . . .	123

5.2.1	Resultados para o Perfil 7 . . . . .	126
5.3	Abordagem 3 . . . . .	151
5.4	Estimativa do Fluxo de Calor . . . . .	161
<b>6</b>	<b>Conclusões e Trabalhos Futuros</b>	<b>165</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>169</b>
<b>A</b>		<b>175</b>
<b>B</b>		<b>182</b>
<b>C</b>		<b>207</b>



# Lista de Figuras

1.1	Contato entre dois materiais. . . . .	1
2.1	Formação de microcontatos e microlacunas. . . . .	4
2.2	Problema de identificação de falha. . . . .	10
3.1	Geometria do problema. . . . .	15
3.2	Dimensões da geometria. . . . .	17
3.3	Perfis de condutância térmica de contato . . . . .	18
3.4	Erro Relativo (%) entre as malhas $241 \times 241 \times 61$ e $481 \times 481 \times 121$ - $\kappa_1 = \kappa_2 = 54\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ . . . . .	19
3.5	Erro Relativo (%) entre as malhas $241 \times 241 \times 61$ e $481 \times 481 \times 121$ - $\kappa_1 = 14 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ e $\kappa_2 = 54\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ . . . . .	20
3.6	Erro Relativo (%) entre as malhas $241 \times 241 \times 61$ e $481 \times 481 \times 121$ - $\kappa_1 = 54\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ e $\kappa_2 = 14\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ . . . . .	20
3.7	Erro Relativo (%) entre o método das diferenças finitas e o Comsol .	21
3.8	Perfis de condutância térmica de contato . . . . .	24
3.9	Erro Relativo (%) entre as malhas $241 \times 241 \times 61$ e $481 \times 481 \times 121$ - $t = 25$ segundos . . . . .	25
3.10	Erro Relativo (%) entre as malhas $241 \times 241 \times 61$ e $481 \times 481 \times 121$ - $t = 100$ segundos . . . . .	25
3.11	Erro Relativo (%) entre o método das diferenças finitas e o Comsol em $z = c$ no domínio $\Omega_1$ . . . . .	26
3.12	Erro Relativo (%) entre o método das diferenças finitas e o Comsol em $z = 2c$ no domínio $\Omega_1$ . . . . .	27
3.13	Erro Relativo (%) entre o método das diferenças finitas e o Comsol em $z = c$ no domínio $\Omega_2$ . . . . .	28
4.1	Erro Relativo (%) entre as malhas $121 \times 121 \times 31$ e $241 \times 241 \times 61$ - $\kappa_1 = \kappa_2 = 54\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ . . . . .	40
4.2	Erro Relativo (%) entre as malhas $121 \times 121 \times 31$ e $241 \times 241 \times 61$ - $\kappa_1 = 14 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ e $\kappa_2 = 54\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ . . . . .	41

4.3	Erro Relativo (%) entre as malhas $121 \times 121 \times 31$ e $241 \times 241 \times 61$ - $\kappa_1 = 54 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ e $\kappa_2 = 14\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ . . . . .	41
4.4	Erro Relativo (%) entre as malhas $121 \times 121 \times 31$ e $241 \times 241 \times 61$ . . . . .	41
4.5	Erro Relativo (%) entre as malhas $121 \times 121 \times 31$ e $241 \times 241 \times 61$ - $\kappa_1 = 54 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ e $\kappa_2 = 54\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ . . . . .	61
4.6	Erro Relativo (%) entre as malhas $121 \times 121 \times 31$ e $241 \times 241 \times 61$ - $\kappa_1 = 54 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ e $\kappa_2 = 54\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ . . . . .	61
4.7	Erro Relativo (%) entre as malhas $121 \times 121 \times 31$ e $241 \times 241 \times 61$ - $\kappa_1 = 54 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ e $\kappa_2 = 54\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ . . . . .	62
4.8	Esquema de previsão e atualização. Adaptado de KAPIO e SOMER-SALO [1]. . . . .	66
5.1	Perfis de condutância térmica de contato. . . . .	72
5.2	Casos Estudados. . . . .	74
5.3	Erro relativo - Caso 1. . . . .	76
5.4	Erro relativo - Caso 2. . . . .	76
5.5	Erro relativo - Caso 3. . . . .	77
5.6	Erro relativo - Caso 4. . . . .	77
5.7	Erro relativo - Caso 5. . . . .	78
5.8	Erro relativo - Caso 6. . . . .	78
5.9	Erro relativo - Caso 7. . . . .	79
5.10	Erro relativo - Caso 8. . . . .	79
5.11	Erro relativo - Caso 9. . . . .	80
5.12	Erro relativo - Caso 10. . . . .	80
5.13	Erro relativo - Caso 11. . . . .	81
5.14	Erro relativo - Caso 12. . . . .	81
5.15	Medidas de temperatura ( $^\circ\text{C}$ ) tomadas na superfície do corpo de prova - Perfil 2. . . . .	83
5.16	Medidas de temperatura ( $^\circ\text{C}$ ) tomadas na superfície do corpo de prova - Perfil 4. . . . .	84
5.17	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 13 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ). . . . .	87
5.18	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 25 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ). . . . .	87
5.19	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 14 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ). . . . .	88
5.20	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 26 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ). . . . .	88
5.21	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 15 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ). . . . .	89
5.22	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 27 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ). . . . .	89
5.23	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 16 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ). . . . .	90
5.24	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 28 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ). . . . .	90
5.25	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 17 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ). . . . .	91

5.26	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 29 - ( $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ ).	91
5.27	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 18 - ( $\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$ ).	92
5.28	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 30 - ( $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ ).	92
5.29	Salto de Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) - Perfil 1 - Configuração 1.	94
5.30	Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 1 - Configuração 1.	95
5.31	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 1 - Configuração 1.	96
5.32	Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 1 - Configuração 1.	97
5.33	Estimativa com 1 função em cada direção - Perfil 1 - Configuração 1 - ( $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ ).	98
5.34	Salto de Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) - Perfil 1 - Configuração 2.	99
5.35	Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 1 - Configuração 2.	100
5.36	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 1 - Configuração 2.	101
5.37	Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 1 - Configuração 2.	101
5.38	Salto de Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) - Perfil 1 - Configuração 3.	102
5.39	Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 1 - Configuração 3.	103
5.40	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 1 - Configuração 3.	104
5.41	Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 1 - Configuração 3.	104
5.42	Salto de Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) - Perfil 2 - Configuração 1.	105
5.43	Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 2 - Configuração 1.	106
5.44	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 2 - Configuração 1.	107
5.45	Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 2 - Configuração 1.	108
5.46	Salto de Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) - Perfil 2 - Configuração 2.	109
5.47	Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 2 - Configuração 2.	110
5.48	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 2 - Configuração 2.	111
5.49	Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 2 - Configuração 2.	112
5.50	Salto de Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) - Perfil 2 - Configuração 3.	113
5.51	Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 2 - Configuração 3.	114
5.52	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 2 - Configuração 3.	115
5.53	Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 2 - Configuração 3.	116
5.54	Aparato experimental (figura cedida por ABREU [2]).	119
5.55	Esboço da amostra de polimetilmetacrilato (PMMA).	120
5.56	Caso Experimental	121
5.57	Resíduo ( $Y - T$ ) - Funcional de Reciprocidade	122
5.58	Perfis de condutância térmica de contato	124
5.59	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 7 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 15 funções.	127
5.60	Convergência da estimativa - Perfil 7 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 15 funções.	128
5.61	Erro RMS - Perfil 7 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 15 funções.	128

5.62	Erro - Perfil 7 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 15 funções. . . . .	129
5.63	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 7 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	130
5.64	Convergência da estimativa - Perfil 7 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	131
5.65	Erro RMS - Perfil 7 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	131
5.66	Erro - Perfil 7 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	132
5.67	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 7 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 7 funções. . . . .	134
5.68	Erro - Perfil 7 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 7 funções. . . . .	134
5.69	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 7 - $\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 15 funções. . . . .	136
5.70	Convergência da estimativa - Perfil 7 - $\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 15 funções. . . . .	137
5.71	Erro RMS - Perfil 7 - $\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 15 funções. . . . .	137
5.72	Erro - Perfil 7 - $\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 15 funções. . . . .	138
5.73	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 7 - $\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	139
5.74	Convergência da estimativa - Perfil 7 - $\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	140
5.75	Erro RMS - Perfil 7 - $\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	140
5.76	Erro - Perfil 7 - $\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	141
5.77	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 7 - $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 15 funções. . . . .	143
5.78	Convergência da estimativa - Perfil 7 - $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 15 funções. . . . .	144
5.79	Erro RMS - Perfil 7 - $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 15 funções. . . . .	144
5.80	Erro - Perfil 7 - $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 15 funções. . . . .	145
5.81	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 7 - $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	146
5.82	Convergência da estimativa - Perfil 7 - $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	147
5.83	Erro RMS - Perfil 7 - $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	147
5.84	Erro - Perfil 7 - $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	148
5.85	Condutância Térmica de Contato - Perfil 5 . . . . .	151
5.86	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 5 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ . . .	152
5.87	Erro - Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 5 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$	153
5.88	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 5 - $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ . .	154
5.89	Erro Absoluto entre as estimativas 5.86c e 5.88c . . . . .	155

5.90	Condutância Térmica de Contato - Perfil 6 . . . . .	156
5.91	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{°C}$ ) - Perfil 6 - $\sigma = 0\text{°C}$ . . .	157
5.92	Erro - Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{°C}$ ) - Perfil 6 - $\sigma = 0\text{°C}$	158
5.93	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{°C}$ ) - Perfil 6 - $\sigma = 0.4\text{°C}$ . .	159
5.94	Erro Absoluto entre as estimativas 5.91c e 5.93c . . . . .	159
5.95	Geometria tridimensional. . . . .	161
5.96	Geometria unidimensional. . . . .	161
5.97	Fluxo de calor transiente exato. . . . .	162
5.98	Estimativa fluxo de calor - $\sigma = 0\text{°C}$ . . . . .	163
5.99	Estimativa fluxo de calor - $\sigma = 0.2\text{°C}$ . . . . .	164
A.1	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 19 - ( $\sigma = 0.2\text{°C}$ ). . . . .	176
A.2	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 31 - ( $\sigma = 0.4\text{°C}$ ). . . . .	176
A.3	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 20 - ( $\sigma = 0.2\text{°C}$ ). . . . .	177
A.4	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 32 - ( $\sigma = 0.4\text{°C}$ ). . . . .	177
A.5	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 21 - ( $\sigma = 0.2\text{°C}$ ). . . . .	178
A.6	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 33 - ( $\sigma = 0.4\text{°C}$ ). . . . .	178
A.7	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 22 - ( $\sigma = 0.2\text{°C}$ ). . . . .	179
A.8	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 34 - ( $\sigma = 0.4\text{°C}$ ). . . . .	179
A.9	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 23 - ( $\sigma = 0.2\text{°C}$ ). . . . .	180
A.10	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 35 - ( $\sigma = 0.4\text{°C}$ ). . . . .	180
A.11	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 24 - ( $\sigma = 0.2\text{°C}$ ). . . . .	181
A.12	Escolha do parâmetro TSVD - Caso 36 - ( $\sigma = 0.4\text{°C}$ ). . . . .	181
B.1	Salto de Temperatura ( $\text{°C}$ ) - Perfil 3 - Configuração 1. . . . .	183
B.2	Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 3 - Configuração 1. . . . .	184
B.3	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{°C}$ ) - Perfil 3 - Configuração 1.	185
B.4	Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 3 - Configuração 1. . . . .	186
B.5	Salto de Temperatura ( $\text{°C}$ ) - Perfil 3 - Configuração 2. . . . .	187
B.6	Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 3 - Configuração 2. . . . .	188
B.7	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{°C}$ ) - Perfil 3 - Configuração 2.	189
B.8	Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 3 - Configuração 2. . . . .	190
B.9	Salto de Temperatura ( $\text{°C}$ ) - Perfil 3 - Configuração 3. . . . .	191
B.10	Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 3 - Configuração 3. . . . .	192
B.11	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{°C}$ ) - Perfil 3 - Configuração 3.	193
B.12	Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 3 - Configuração 3. . . . .	194
B.13	Salto de Temperatura ( $\text{°C}$ ) - Perfil 4 - Configuração 1. . . . .	195
B.14	Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 4 - Configuração 1. . . . .	196
B.15	Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{°C}$ ) - Perfil 4 - Configuração 1.	197
B.16	Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 4 - Configuração 1. . . . .	198

B.17 Salto de Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) - Perfil 4 - Configuração 2. . . . .	199
B.18 Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 4 - Configuração 2. . . . .	200
B.19 Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 4 - Configuração 2. . . . .	201
B.20 Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 4 - Configuração 2. . . . .	202
B.21 Salto de Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) - Perfil 4 - Configuração 3. . . . .	203
B.22 Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 4 - Configuração 3. . . . .	204
B.23 Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 4 - Configuração 3. . . . .	205
B.24 Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 4 - Configuração 3. . . . .	206
C.1 Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 8 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 15 funções. . . . .	208
C.2 Convergência da estimativa - Perfil 8 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 15 funções. . . . .	209
C.3 Erro RMS - Perfil 8 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 15 funções. . . . .	209
C.4 Erro - Perfil 8 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 1 - 15 funções. . . . .	210
C.5 Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 8 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	211
C.6 Convergência da estimativa - Perfil 8 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	212
C.7 Erro RMS - Perfil 8 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	212
C.8 Erro - Perfil 8 - $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	213
C.9 Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 8 - $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	216
C.10 Convergência da estimativa - Perfil 8 - $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	217
C.11 Erro RMS - Perfil 8 - $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	217
C.12 Erro - Perfil 8 - $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ - Metodologia 2 - 15 funções. . . . .	218

# Lista de Tabelas

3.1	Perfis de condutância térmica de contato. . . . .	17
3.2	Casos para convergência de malha . . . . .	17
3.3	Perfis de condutância térmica de contato. . . . .	23
3.4	Configuração para convergência de malha . . . . .	24
5.1	Configuração dos materiais . . . . .	70
5.2	Perfis de condutância térmica de contato. . . . .	71
5.3	Temperatura máxima em $\Gamma_0$ . . . . .	71
5.4	Casos Estudados . . . . .	73
5.5	Parâmetro TSVD . . . . .	86
5.6	Parâmetro de truncamento ideal . . . . .	93
5.7	Tempo Computacional . . . . .	118
5.8	Configuração dos materiais . . . . .	123
5.9	Perfis de condutância térmica de contato. . . . .	123
5.10	Tempo Computacional - Perfil 7 - $\sigma = 0^\circ\text{C}$ - 15 funções. . . . .	133
5.11	Tempo Computacional - Perfil 7 - $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ - 15 funções. . . . .	142
5.12	Tempo Computacional - Perfil 7 - $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ - 15 funções. . . . .	149
5.13	Configuração dos materiais . . . . .	151
C.1	Tempo Computacional - Perfil 8 - $\sigma = 0^\circ\text{C}$ - 15 funções. . . . .	214

# Lista de Símbolos

Símbolo	Descrição	Unidade
$a$	Comprimento dos domínios 1 e 2	m
$b$	Largura dos domínios 1 e 2	m
$c$	Altura de cada domínio	m
$\mathbf{E}$	Matriz de evolução das variáveis de estado	
$F_1, F_2, G_1$	Funções auxiliares	
$\mathbf{Fh}_{m1}$	Campo da função auxiliar com a malha $121 \times 121 \times 31$	
$\mathbf{Fh}_{m2}$	Campo da função auxiliar com a malha $241 \times 241 \times 61$	
$h$	Condutância térmica de contato	$\text{W/m}^2\text{°C}$
$\mathbf{H}$	Matriz de observação	
$\mathbf{J}$	Matriz de evolução das variáveis de controle	
$\mathbf{K}$	Matriz de ganho de Kalman	
$L^2$	Espaço de Hilbert	
$N$	Número total de funções ortonormais	
$N_1, N_2, N_3$	Número de funções ortonormais nas direções $x$ , $y$ e $t$ , resp.	
$p_1, p_2, p_3$	Número de pontos da malha nas direções $x$ , $y$ e $z$ , resp.	
$\mathbf{P}^+$	Matriz de covariância a posteriori do erro das estimativas	
$\mathbf{P}^-$	Matriz de covariância a priori do erro das estimativas	
$q$	Fluxo de calor	$\text{W/m}^2$
$\mathbf{Q}$	Matriz de covariância do ruído do modelo de evolução	
$Q_c$	Taxa de transferência de calor do microcontato	W
$Q_l$	Taxa de transferência de calor da lacuna	W
$Q_t$	Taxa de transferência de calor total	W
$R$	Resistência térmica de contato	$\text{m}^2\text{°C/W}$
$\mathbf{s}$	Vetor de variáveis independentes do estado do sistema	
$\mathfrak{R}$	Funcional de Reciprocidade	
$T_1$	Campo de temperatura do domínio 1	°C
$T_2$	Campo de temperatura do domínio 2	°C
$\mathbf{T}_{m1}$	Campo de temperatura com a malha $241 \times 241 \times 61$	°C
$\mathbf{T}_{m2}$	Campo de temperatura com a malha $481 \times 481 \times 121$	°C
$\mathbf{u}$	Vetor de variáveis de controle	



$\mathbf{v}$	Vetor de ruído do modelo de evolução	$^{\circ}\text{C}$ ou $\text{W}/\text{m}^2$
$\mathbf{w}$	Vetor de ruído do modelo de observação	$^{\circ}\text{C}$
$\mathbf{W}$	Matriz de covariância do ruído do modelo de observação	
$x$	Variável independente espacial	m
$\mathbf{x}$	Vetor de estados do sistema	$^{\circ}\text{C}$ ou $\text{W}/\text{m}^2$
$\mathbf{x}^-$	Estimativa a priori do vetor de estados	$^{\circ}\text{C}$ ou $\text{W}/\text{m}^2$
$\mathbf{x}^+$	Estimativa a posteriori do vetor de estados	$^{\circ}\text{C}$ ou $\text{W}/\text{m}^2$
$y$	Variável independente espacial	m
$\mathbf{y}$	Vetor de observações	$^{\circ}\text{C}$
$Y$	Medidas de temperatura	$^{\circ}\text{C}$
$z$	Variável independente espacial	m

## Símbolos Gregos

Símbolo	Descrição	Unidade
$\alpha_1$	Difusividade térmica do domínio 1	$\text{m}^2/\text{s}$
$\alpha_2$	Difusividade térmica do domínio 2	$\text{m}^2/\text{s}$
$\beta$	Derivada da função auxiliar $F_1$ em $\Gamma$	
$\gamma$	Coeficientes desconhecidos do problema auxiliar modificado 2	
$\Gamma$	Interface entre os domínios 1 e 2	
$\Gamma_0$	Superfície $z = c$ no domínio 1	
$\Gamma_1$	Superfícies $x = 0$ , $x = a$ , $y = 0$ e $y = b$ no domínio 1	
$\Gamma_2$	Superfícies $x = 0$ , $x = a$ , $y = 0$ e $y = b$ no domínio 2	
$\Gamma_{\infty}$	Superfície $z = 0$ no domínio 2	
$\Delta t$	Passo no tempo	s
$\Delta T$	Salto de temperatura na interface	$^{\circ}\text{C}$
$\varepsilon$	Variável aleatória (distribuição Gaussiana com média zero e variância unitária)	
$\varepsilon_{svd}$	Parâmetro de truncamento do método TSVD	
$\zeta$	Coeficientes desconhecidos do problema auxiliar modificado 1	
$\eta$	Valores singulares de uma matriz	
$\kappa_1$	Condutividade térmica do domínio 1	$\text{W}/\text{m}^{\circ}\text{C}$
$\kappa_2$	Condutividade térmica do domínio 2	$\text{W}/\text{m}^{\circ}\text{C}$
$\lambda_1$ e $\lambda_2$	Números aleatórios uniformemente distribuídos entre $[0, 1]$	
$\sigma$	Desvio-padrão das medidas de temperatura	$^{\circ}\text{C}$
$\sigma_q$	Desvio-padrão da variável de estado - fluxo de calor	$\text{W}/\text{m}^2$
$\sigma_t$	Desvio-padrão da variável de estado - temperatura	$^{\circ}\text{C}$
$\phi$	Função auxiliar $G_1$ em $\Gamma$	
$\psi$	Base de funções ortonormais	
$\Omega$	Domínio Total	

$\Omega_1$	Domínio 1
$\Omega_2$	Domínio 2

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivação e Objetivos

No estudo da transferência de calor entre duas ou mais superfícies sólidas, deve-se levar em conta que não há um contato térmico perfeito entre estes sólidos. Mesmo as superfícies aparentemente lisas, quando analisadas microscopicamente, apresentam imperfeições. Portanto, na junção dos sólidos serão formados vales decorrentes das imperfeições dos materiais, como pode ser visto na figura 1.1, que podem ser preenchidos por um fluido, onde a transferência de calor, na grande maioria dos casos, ocorre por condução.

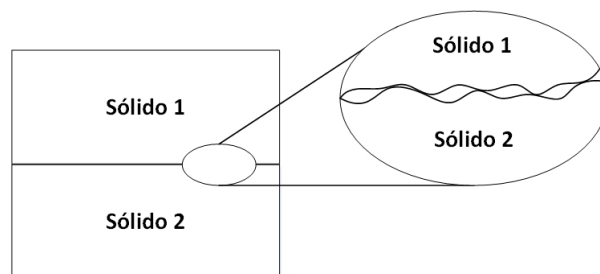


Figura 1.1: Contato entre dois materiais.

Quando a condutividade térmica deste fluido for menor que a dos sólidos considerados, estes vales funcionarão como uma resistência térmica, ocasionando um salto de temperatura na interface. Esta resistência à transferência de calor é conhecida como *Resistência Térmica de Contato* [3–6] e depende de diferentes fatores: tipo de materiais que estão em contato, temperatura e pressão na interface, acabamento da superfície do material, tipo de fluido (ou falta dele) nos espaços da interface [4, 6], dentre outros. Outra quantidade de interesse é a condutância térmica de contato, definida como o inverso da resistência térmica de contato.

A detecção da resistência/condutância térmica de contato é importante em várias áreas do conhecimento, como reatores nucleares [7, 8], componentes eletrônicos [9],

indústria aeroespacial [10], dentre outros. Em alguns casos, a condutância térmica de contato pode apresentar variações com o tempo. Um exemplo disto pode ser encontrado na indústria automobilística, em particular, durante o processo de abertura e fechamento das válvulas de exaustão de motores de combustão interna [11].

Por ser difícil de ser calculada, existem muitos trabalhos [2, 7, 8, 12–15] de estimativa, tanto experimentais como numéricos, que na maioria dos casos utilizam medidas tomadas próximo à interface entre os materiais. Outro fator que dificulta a estimativa é o tempo computacional, que geralmente é alto nas técnicas comumente utilizadas para a estimativa numérica.

O tema proposto segue uma linha de estudo em problemas inversos [1, 16–19] que é de interesse em diversas pesquisas atuais, principalmente em processos industriais (ensaios não destrutivos) e biomedicina (detecção de tumores e fraturas). O desenvolvimento de técnicas não intrusivas permite a identificação de propriedades, falhas e não homogeneidades internas de materiais de forma não destrutiva, tornando-se, assim, uma ferramenta extremamente versátil para a abordagem dos problemas de interesse.

Pretende-se estimar a condutância térmica de contato bidimensional entre dois materiais tridimensionais, através de um método baseado no *Funcional de Reciprocidade* [20]. Para isso, são resolvidos dois problemas auxiliares e, posteriormente, através da metodologia desenvolvida em COLAÇO e ALVES [21], ABREU *et al.* [22], COLAÇO *et al.* [23], COLAÇO e ALVES [24] e TOUGRI *et al.* [25], é possível obter o perfil da condutância térmica de contato. Essa técnica é considerada rápida, uma vez que os problemas auxiliares não dependem da condutância térmica de contato, podendo ser resolvidos uma única vez, mudando somente o cálculo do Funcional de Reciprocidade e o sistema linear decorrente de sua utilização.

A física proposta envolve o processo de transferência de calor por condução tanto em regime estacionário como transiente entre dois corpos em contato. O objetivo é identificar a variação espacial e transiente da condutância térmica de contato utilizando como base medições de temperatura tomadas na superfície superior externa do corpo de prova. Deseja-se realizar estas medidas de forma não intrusiva, a exemplo do processo de termografia por infravermelho.

Com o objetivo de validar a técnica para identificação com variação espacial utilizada no presente trabalho, serão utilizadas medidas experimentais obtidas por ABREU [2] e ABREU *et al.* [26]. A fim de mostrar a rapidez da técnica apresentada, o tempo computacional necessário para realizar as estimativas com a presente técnica será comparado com o tempo computacional necessário utilizando o método de Monte Carlo com Cadeias de Markov [2, 26].

Por fim, com a necessidade da estimativa do fluxo de calor aplicado em um caso real, será apresentado um caso numérico de estimativa de fluxo de calor utilizando

o Filtro de Kalman.

O método do Funcional de Reciprocidade já foi utilizado para a realização de estimativa unidimensional da condutância térmica de contato [2, 21–25, 27], mostrando que a técnica é promissora. Neste trabalho será feita uma extensão para estimativas bidimensionais estacionárias e transientes. As abordagens que serão apresentadas nunca foram utilizadas em problemas de transferência de calor tridimensionais com perfil de condutância térmica de contato bidimensional, mostrando assim o ineditismo deste trabalho. Além disso, será apresentado um esquema de regularização utilizando o método TSVD (Truncated Singular Value Decomposition)[28–31] para resolver os sistemas mal condicionados decorrentes da aplicação do método do Funcional de Reciprocidade.

## 1.2 Organização do Trabalho

Este trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 2 será apresentada uma breve revisão bibliográfica sobre Problemas Inversos, Funcional de Reciprocidade e Condutância/Resistência Térmica de Contato, necessária para um melhor entendimento do problema proposto.

No capítulo 3 serão apresentados os problemas diretos permanente e transiente, a formulação matemática, o método de solução empregado e a verificação para ambos os casos.

No capítulo 4 serão apresentadas as quatro metodologias propostas para a solução do problema inverso, assim como as formulações matemáticas e os detalhes sobre os códigos computacionais desenvolvidos.

No capítulo 5 serão apresentados os resultados obtidos com as quatro metodologias, assim como o esquema de regularização empregado.

No capítulo 6 serão apresentadas as conclusões e as propostas para trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Revisão Bibliográfica

Neste capítulo será apresentada uma breve revisão da literatura, mostrando conteúdos importantes para a realização do presente estudo.

### 2.1 Resistência Térmica de Contato

A resistência térmica de contato é definida como a resistência ao fluxo de calor entre dois ou mais materiais em suas interfaces de contato. Esta resistência decorre dos vales formados pelas imperfeições presentes nas superfícies dos materiais em contato, podendo ser preenchidos por um fluido.

Existem diferentes tipos de junções mecânicas, podendo ser lisas e não conformes, ásperas e não conformes, e ásperas e conformes [10]. Neste trabalho, estamos interessados no último caso, onde tem-se a formação de microcontatos e microlacunas. A figura 2.1 apresenta um esquema da junção de dois materiais *A* e *B*, mostrando a formação dos microcontatos e microlacunas. Observe que a transferência de calor ocorre tanto pelos contatos como pelos interstícios.

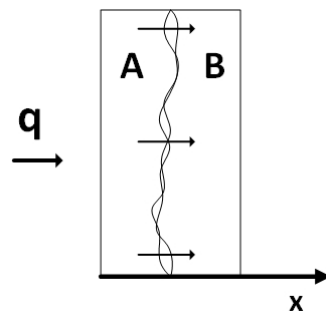


Figura 2.1: Formação de microcontatos e microlacunas.

A transferência de calor na interface ocorre principalmente por condução. Além da condução, pode haver transferência de calor por radiação [5, 9, 32, 33], que não será considerada neste trabalho. O ar é, na maioria dos casos, o fluido presente nos

vales. Sua ausência (vácuo) elimina a transferência de calor pelas lacunas, restando somente a transferência de calor através de microcontatos.

Será considerado  $Q_t$  como a taxa total de transferência de calor, isto é,  $Q_t$    a soma das taxas de transferência de calor da lacuna  $Q_l$  e do microcontato  $Q_c$ . Podemos escrevê-la como [4],

$$Q_t = hA\Delta T \quad [\text{W}] \quad (2.1)$$

Logo, reorganizando a Eq.(2.1) tem-se

$$h = \frac{Q_t/A}{\Delta T} \quad [\text{W/m}^2\text{ C}] \quad (2.2)$$

onde  $Q_t$    a taxa total de transferência de calor,  $A$    a área de interface aparente,  $\Delta T$  o salto de temperatura na interface e  $h$  a condutância térmica de contato. Podemos representar a condutância térmica de contato da seguinte forma,

$$h = \frac{q}{\Delta T} \quad [\text{W/m}^2\text{ C}] \quad (2.3)$$

onde  $q$  é o fluxo de calor e  $\Delta T$  o salto de temperatura, ambos na interface.

A *Resistência Térmica de Contato*   definida como o inverso da condutância térmica de contato, como é visto na Eq.(2.4),

$$R = \frac{1}{h} \quad [\text{m}^2\text{ C/W}] \quad (2.4)$$

As Eqs. (2.3) e (2.4) são as definições da condutância térmica de contato,  $h$  ( $\text{W/m}^2\text{ C}$ ), e da resistência térmica de contato,  $R$  ( $\text{m}^2\text{ C/W}$ ), respectivamente.

Como dito anteriormente, a resistência térmica de contato depende de vários fatores físicos, geométricos e térmicos. Para aumentar/melhorar a transferência de calor na interface, deve-se diminuir a resistência térmica de contato e, portanto, de acordo com a Eq.(2.4), aumentar a condutância térmica de contato.

Na literatura, são relatadas várias formas para diminuir a resistência térmica de contato, entre elas: acréscimo da pressão de contato, redução da rugosidade das superfícies e preenchimento das lacunas com uma substância interfacial [5], entre outros.

Existem diferentes materiais interfaciais [5, 9, 34] como: material gasoso, graxa, material de mudança de fase, folhas metálicas, polímeros, e adesivos, dentre outros. A resistência térmica será reduzida se a condutividade térmica da substância que preencher as lacunas for maior do que a condutividade térmica dos materiais em contato.

O estudo da resistência térmica de contato está presente em diversas áreas de pesquisa. Em YO VANOVICH [10], o autor apresentou uma linha do tempo mos-

trando as várias áreas de aplicação do conceito da resistência térmica de contato. De 1930 a 1950 existem diversos trabalhos na área de criogenia; já de 1940 a 1955 apareceram alguns trabalhos na área da indústria aeronáutica. De 1950 a 1970 surgiu, nas indústrias nucleares, o interesse pela resistência de contato devido aos projetos de reatores e, de 1960 a 1985, a NASA investigou o assunto devido a junções encontradas em veículos espaciais e satélites. A partir de 1970 a indústria microeletrônica impulsionou estudos nessa área devido às várias interfaces fonte de calor/dissipador de calor que aparecem nos dispositivos eletrônicos. Finalmente, por volta de 2000 surgiram os trabalhos de resistência térmica de contato em nanoescala.

Atualmente, o estudo da resistência térmica de contato em equipamentos eletrônicos e microeletrônicos ainda é muito importante, visto que a capacidade de processamento dos dispositivos tem aumentado e, conseqüentemente, mais calor deve ser removido destes equipamentos. Segundo GRUJICIC *et al.* [9], o desempenho, o ciclo de vida e a confiabilidade destes dispositivos podem vir a ser limitadas por uma dissipação de energia térmica ineficiente.

A resistência térmica de contato é difícil de ser determinada por depender de muitos fatores como já foi citado anteriormente. Por este motivo são encontrados na literatura diversos trabalhos de estimativa, tanto numéricos como experimentais, como será mostrado adiante. Contudo, na maioria das vezes, tais experimentos são realizados para materiais sob condições específicas.

O principal problema com os estudos de estimativa é o fato da maior parte deles incluir medições de temperatura intrusivas. Apesar das técnicas clássicas de estimativa numérica serem largamente utilizadas, em determinados casos o custo computacional pode se tornar um obstáculo.

A seguir são apresentados alguns trabalhos presentes na literatura de estimativa da resistência/condutância térmica de contato.

MCWAID e MARSCHALL [12] utilizaram o modelo Greenwood e Williamson modificado para estimar o número de contatos e fração da área real de contato resultante da junção entre duas superfícies. Estes parâmetros são necessários para a previsão da resistência térmica de contato. Os autores revisaram um experimento contido na literatura e apresentaram os modelos GW original e modificado. Compararam os resultados experimentais com os obtidos pelos modelos e comprovaram que ambas as modelagens resultam em valores relativamente precisos dos parâmetros estimados.

WOLFF e SCHNEIDER [35] estudaram superfícies de contato polidas, uma vez que o modelo matemático tomado como referência falhava em prever com precisão a espessura efetiva da lacuna entre os materiais para este tipo de superfície. Determinaram o salto de temperatura na interface e analisaram os efeitos da pressão, da rugosidade, da dureza e das propriedades térmicas dos materiais na interface na



resistência térmica de contato.

MAROTTA *et al.* [36] investigaram a resistência térmica de contato de superfícies não planas, rugosas e com revestimento não metálico. Calcularam uma resistência térmica de contato total que incluía as resistências microscópica e macroscópica. Para isso foram levados em consideração parâmetros da geometria (como rugosidade da superfície, aspereza e outros), assim como as propriedades termofísicas e mecânicas.

MILOŠEVIĆ *et al.* [8] estimaram a resistência térmica de contato global entre dois sólidos, juntamente com a estimativa de outros parâmetros do modelo, utilizando o método flash laser combinado com uma abordagem inversa, isto é, utilizaram medidas não intrusivas. Primeiramente, fizeram uma análise dos coeficientes de sensibilidade e testaram três combinações de materiais: cobre-cobre, alumina-alumina e cobre-alumina. Concluíram que as estimativas eram precisas quando os materiais eram bons condutores de calor. O valor da resistência térmica de contato também influencia a qualidade dos resultados, a qual é melhor para maiores valores deste parâmetro.

KUMAR e RAMAMURTHI [37] analisaram a condutância térmica de contato entre juntas metálicas submetidas a baixas temperaturas. Para isso, fizeram experimentos com diferentes acabamentos superficiais e pressões de contato, e desenvolveram uma correlação para calcular a condutância térmica de contato. Mostraram que a condutância térmica de contato é reduzida com a redução da temperatura da interface e que, apesar de uma maior pressão aplicada na interface aumentar a condutância térmica de contato, em casos de temperaturas mais baixas isso se torna menos significativo. Mostraram ainda uma razoável concordância entre os dados experimentais e as previsões propostas.

ROSOCHOWSKA *et al.* [13] explicaram como é a montagem de um aparato experimental típico para determinar a condutância térmica de contato em estado estacionário. Apresentaram uma nova metodologia e experimentos preliminares para determinar o coeficiente de transferência de calor na interface ferramenta-amostra. Concluíram que é possível quantificar a condutância térmica de contato.

FIEBERG e KNEER [38], interessados no estudo da resistência térmica de contato em motores de combustão, isto é, em condições de alta pressão e de alta temperatura, montaram um experimento onde dois corpos com temperaturas iniciais diferentes eram colocados em contato e pressionados. Com uma câmera infravermelha fizeram medições de temperatura transientes na interface. Utilizaram essas medidas de temperatura como dados de entrada para estimar o fluxo de calor na interface através do método de estimativa sequencial. Com a estimativa do fluxo, e usando medidas de temperatura da interface, determinaram a resistência térmica de contato.

GILL *et al.* [15] estimaram a variação espacial da resistência térmica de contato entre dois materiais iguais. Estudaram um problema bidimensional em regime permanente através de dois métodos de solução, fizeram testes numéricos com uma resistência térmica constante e uma segunda variando com a posição. Os autores mostraram a necessidade da regularização, visto que os resultados eram sensíveis aos ruídos presentes nas medições. As temperaturas medidas foram tomadas muito próximo à interface, mostrando ser um método intrusivo.

SHOJAEFARD *et al.* [39] utilizaram os métodos do gradiente conjugado e de extrapolação linear para estimar a condutância térmica de contato sem variação espacial mas com variação temporal, com dados experimentais. Neste último método, calcularam o fluxo de calor e o salto de temperatura utilizando medidas tomadas próximo à interface. Por fim, fizeram uma validação através da distribuição de temperatura em estado estacionário obtida experimentalmente. Os métodos avaliados foram o método gradiente conjugado, o método de extrapolação linear e a solução numérica obtida pelo software comercial COMSOL Multiphysics. Para o cálculo do campo de temperatura no Comsol foi utilizada a condutância térmica de contato estimada pelo método gradiente conjugado. Através da investigação do erro desta análise da temperatura em estado estacionário, concluíram que o método de extrapolação linear apresentava melhores resultados.

LIU *et al.* [14] investigaram experimentalmente a resistência térmica de contato entre um material de alta condutividade térmica e uma superliga Inconel 600. Fizeram testes em estado estacionário e avaliaram a dependência da resistência térmica de contato com a pressão e a temperatura na interface.

BURGHOLD *et al.* [40] apresentaram um método para medir a condutância térmica de contato entre duas amostras feitas de aço utilizando medidas de temperatura transientes captadas através de uma câmera infravermelha. O método consiste em 3 etapas: medição das temperaturas utilizando a câmera infravermelha, processamento dos dados obtidos com a câmera e realização da estimativa da condutância térmica de contato empregando o método do Gradiente Conjugado. Os autores mostraram que a força aplicada sobre as amostras tem influência direta na condutância térmica de contato.

TARIQ e ASIF [41] desenvolveram um experimento para avaliar a condutância térmica de contato em estado estacionário. Os testes foram realizados utilizando três tipos de materiais (latão, cobre e aço inoxidável) em um ambiente à vácuo. Os autores avaliaram diferentes tipos de rugosidade na superfície e diferentes pressões de contato. Os resultados experimentais foram comparados com modelos teóricos presentes na literatura. Tais modelos não foram capazes de prever corretamente os valores no caso com maior rugosidade utilizando o cobre.

DONGMEI *et al.* [42] mediram a resistência térmica de contato para três tipos de

materiais cerâmicos submetidos a baixas temperaturas através do método de laser fototérmico. Os autores avaliaram a influência da temperatura e da pressão de contato na resistência térmica de contato e estabeleceram algumas fórmulas empíricas para a resistência térmica de contato que apresentaram boa concordância com os dados experimentais.

KUMAR e TARIQ [43] investigaram experimentalmente a condutância térmica de contato em estado estacionário entre dois sólidos feitos de latão, onde analisaram combinações de contato plano-plano, cilíndrico-plano, cilíndrico-clíndrico com diferentes pressões na interface. Investigaram ainda o uso da termografia de cristal líquido para obter as estimativas com as diferentes configurações em consideração. Observaram que o aumento da pressão na interface aumenta a condutância térmica de contato, principalmente no caso plano-plano.

ZHANG *et al.* [44] mediram experimentalmente a resistência térmica de contato de cinco tipos de materiais de liga de alumínio comumente usadas em equipamentos eletrônicos. Analisaram ainda os efeitos da pressão na interface e da rugosidade da superfície na resistência térmica de contato.

## 2.2 Problemas Inversos e Funcional de Reciprocidade

O problema proposto neste trabalho envolve a estimativa da condutância térmica de contato conhecendo-se somente medidas de temperatura tomadas em uma das superfícies do corpo de prova. Este tipo de problema é classificado como problema inverso, que consiste na necessidade de estimar um ou mais parâmetros, condições ou propriedades que sejam desconhecidos em um dado problema. Esta classe de problemas vem sendo cada vez mais utilizada em diferentes áreas do conhecimento, como engenharia e medicina, dentre outras, com diversas aplicações.

Matematicamente, o problema inverso é caracterizado como mal-posto. Para ser bem-posto o problema deve cumprir as três condições a seguir [45]:

1. Existência;
2. Unicidade;
3. Estabilidade com relação aos dados de entrada.

Desta forma, o problema é dito mal-posto se alguma das condições acima não é satisfeita. Existem diferentes trabalhos que são importantes para o entendimento da teoria dos problemas inversos. Alguns deles são: TIKHONOV e ARSENIN

[16], BECK *et al.* [17], ALIFANOV [18], ÖZISIK e ORLANDE [19] e KAPIO e SOMERSALO [1].

Para a solução dos problemas inversos, existem técnicas determinísticas como o Método de Levenberg-Marquardt e o Método do Gradiente Conjugado [19], ou métodos baseados na Inferência Bayesiana como o Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov, o Filtro de Kalman e o Filtro de Partículas [1]. Neste trabalho será utilizado um método determinístico baseado na abordagem por *Funcional de Reciprocidade* [20].

A abordagem por Funcional de Reciprocidade para identificação de falhas foi desenvolvida por ANDRIEUX e ABDA [20], partindo do conceito do *Teorema de Reciprocidade de Maxwell-Betti* [46] (em elasticidade). A generalização deste Teorema é dada pelo *Teorema de Reciprocidade de Betti*.

O estudo apresentado em ANDRIEUX e ABDA [20] foi introdutório. Os autores definiram o funcional de reciprocidade, mostrando que o seu cálculo envolve integrais na fronteira de quantidades que são conhecidas. A fim de aprofundar os estudos já desenvolvidos, ANDRIEUX e ABDA [47] derivaram fórmulas de inversão explícitas para determinar o plano que contém a falha e também o comprimento de uma falha emergente.

O funcional para problemas de identificação de falhas pode ser definido da seguinte forma [20, 47, 48]: considera-se um problema de condução de calor (ou elétrica) em estado estacionário para um meio homogêneo, cf. Eq. (2.5), representado na Fig. (2.2),

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \Phi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.5)$$

onde  $u$  é um campo qualquer em equilíbrio em um corpo  $\Omega$ ,  $\Phi$  é um fluxo aplicado na superfície do corpo  $\partial\Omega$  e  $Y$  são medições de  $u$  feitas na superfície  $\partial\Omega$ .

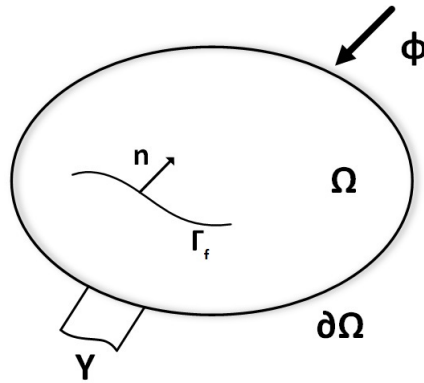


Figura 2.2: Problema de identificação de falha.

Considera-se também um outro problema, sem falhas, dado pelas Eqs. (2.6),

$$\begin{cases} \nabla^2 v = 0, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \tilde{\Phi}, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.6)$$

onde medições  $\tilde{Y}$  de  $v$  são feitas na superfície  $\partial\Omega$ . O seguinte funcional é então definido:

$$\int_{\partial\Omega} (\Phi \tilde{Y} - \tilde{\Phi} Y) d(\partial\Omega) \quad (2.7)$$

Portanto, de acordo com o princípio da reciprocidade [47, 48], a Eq. (2.7) é nula se não existirem falhas  $\Gamma_f$  no domínio  $\Omega$ . A partir da Eq. (2.7) o funcional de reciprocidade é definido da seguinte maneira:

$$RG_{[\Phi, Y]}(v) = \int_{\partial\Omega} (\Phi \tilde{Y} - \tilde{\Phi} Y) d(\partial\Omega) = \int_{\partial\Omega} \left( \Phi v - \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} Y \right) d(\partial\Omega) \quad (2.8)$$

onde  $v \in H^1(\Omega)$  é uma função harmônica qualquer e  $RG_{[\Phi, Y]}(v)$  é uma forma linear no conjunto  $H = \{v \in H^1(\Omega); \nabla^2 v = 0\}$ .

Se o valor deste funcional é não nulo, isto significa que há uma perturbação no domínio e, portanto, existe(m) falha(s) em  $\Omega$ . A partir desta ideia, os autores desejavam encontrar e identificar uma ou mais falhas em um corpo.

A partir do método proposto por Stéphane Andrieux e Amel Ben Abda para identificação do plano que contém falhas, BANNOUR *et al.* [48] propuseram a identificação das falhas em si, através do conceito do funcional de reciprocidade. Apesar do método conseguir reconstruir falhas, ainda possuía algumas limitações, como por exemplo, as falhas deveriam ser planares no caso 3D e segmentos no caso 2D. Se fossem várias falhas, elas deveriam ser coplanares ou colineares, nos casos 3D e 2D, respectivamente.

Existem diferentes estudos nesta mesma linha de identificação utilizando o funcional de reciprocidade, como é o caso do trabalho de ABDA *et al.* [49] de identificação de forma e localização de falhas planares, e o trabalho de COLTON e HADDAR [50] que combina ideias do método da amostragem linear com o funcional de reciprocidade para descobrir a forma de um objeto no interior de um domínio. Um método qualitativo para detecção de câncer de mama, combinando o método de funcional de reciprocidade com o método de amostragem linear utilizando medidas não intrusivas, foi desenvolvido por DELBARY *et al.* [51] e vários outros estudos com diferentes aplicações [21, 52, 53].

O objetivo do presente trabalho é a estimativa de perfis de condutância térmica de contato bidimensionais em problemas estacionários e transientes utilizando o fun-

cional de reciprocidade. A estimativa da condutância térmica de contato utilizando o funcional de reciprocidade já foi realizada mas sempre em perfis unidimensionais, como será visto a seguir.

A estimativa da variação espacial unidimensional da condutância térmica de contato em problemas estacionários utilizando uma abordagem de funcional de reciprocidade com medidas de temperatura não intrusivas foi desenvolvida por COLAÇO e ALVES [21]. A metodologia desenvolvida é considerada rápida e não iterativa pois resolve dois problemas auxiliares sem a dependência da condutância térmica e, posteriormente, através do cálculo de algumas integrais, é possível recuperar diferentes perfis de condutâncias térmicas de contato. Deve-se ressaltar que ambos problemas auxiliares possuíam duas condições determinadas no mesmo contorno, sendo chamados de problemas de Cauchy.

Com objetivo de propor uma extensão da metodologia desenvolvida em COLAÇO e ALVES [21], ABREU *et al.* [22] resolveram o mesmo problema de estimativa da variação espacial unidimensional da condutância térmica de contato em problemas estacionários e também utilizaram a abordagem de funcional de reciprocidade, mas fizeram uma reformulação nos problemas auxiliares, o que levou estes problemas a deixarem de ser problemas de Cauchy. A metodologia apresentada é mais simples, porém com alguns passos extras a serem desenvolvidos. Concluíram que as metodologias são equivalentes.

PADILHA *et al.* [27] utilizaram a modificação dos problemas auxiliares proposta por ABREU *et al.* [22] para realizar a estimativa unidimensional da condutância térmica de contato através da abordagem por funcional de reciprocidade. Os problemas auxiliares foram resolvidos pela Técnica da Transformada Integral Clássica e os autores mostraram que, escolhendo adequadamente a base de funções ortonormais, necessária nesta abordagem, é possível obter uma equação algébrica para a condutância térmica de contato, eliminando com isso a necessidade da solução de dois sistemas lineares, como feito em ABREU *et al.* [22]. Esta forma de solução diminui consideravelmente o tempo computacional, apesar de não apresentar melhora significativa das estimativas quando comparadas com as metodologias anteriores [21, 22]. A metodologia foi validada utilizando medidas experimentais obtidas por ABREU [2] e ABREU *et al.* [26].

A estimativa da variação espacial unidimensional da condutância térmica de contato em problemas transientes já foi realizada. Na metodologia desenvolvida por COLAÇO *et al.* [23], a formulação matemática dos problemas auxiliares foi a mesma utilizada para o caso em regime permanente apresentada em COLAÇO e ALVES [21]. Entretanto, o desenvolvimento da metodologia teve algumas modificações, onde integrais envolvendo o termo transiente foram acrescentadas. Devido ao acréscimo destes termos, a estimativa da condutância térmica de contato requeria um processo

iterativo para cada passo no tempo.

TOUGRI *et al.* [25] propuseram uma modificação na metodologia desenvolvida por COLAÇO *et al.* [23]. As integrais que tornavam o trabalho de COLAÇO *et al.* [23] iterativo foram substituídas por integrais no contorno e, com isso, foi possível calcular a condutância térmica de contato sem a necessidade do problema direto durante a estimativa. Mostraram que, com poucas medidas de temperatura temporais, era possível recuperar perfis de condutância térmica até mesmo com medidas ruidosas.

A fim de realizar a estimativa da variação espacial e transiente unidimensional da condutância térmica de contato, COLAÇO e ALVES [24] formularam matematicamente problema auxiliares transientes. Através da modificação da metodologia apresentada em ABREU *et al.* [22] para o regime transiente, foi possível realizar as estimativas de forma não iterativa.

No geral, todos os resultados de estimativa de condutância térmica de contato unidimensional em problemas estacionários e transientes foram bons, até mesmo quando foram utilizadas medidas de temperatura com ruídos. Devido aos bons resultados e ao baixo custo computacional, esta técnica é considerada promissora.

Esta revisão sobre resistência térmica de contato e funcional de reciprocidade possibilitou um maior entendimento sobre o assunto proposto. Com base nesta análise da literatura, foi observado que existem muitos trabalhos de medição de condutância térmica de contato através de experimentos. Estes trabalhos experimentais são feitos para condições específicas, isto é, para determinados materiais e sob certas condições como rugosidade da superfície e pressão de contato. Em muitos trabalhos, é realizada somente a estimativa da condutância térmica de contato como um valor global ou apenas com variação temporal sendo constante no espaço. Existem ainda, muitos casos, onde o uso de medidas é feito de forma intrusiva. Portanto, dificilmente são reportados trabalhos de estimativa bidimensional com variação espacial e temporal utilizando medidas de temperatura não intrusivas. Com relação ao funcional de reciprocidade, existem trabalhos para a estimativa unidimensional da condutância térmica de contato, mas não foram encontrados trabalhos de estimativa bidimensional utilizando o funcional de reciprocidade em problemas estacionários e transientes, verificando-se o ineditismo do presente estudo.

Em virtude dos ótimos resultados obtidos nos trabalhos de estimativa unidimensional da condutância térmica de contato utilizando o Funcional de Reciprocidade [2, 21–25, 27], esta técnica será empregada em estimativas bidimensionais. Deve-se ressaltar que serão apresentadas 3 abordagens baseadas no funcional de reciprocidade. São elas:

1. abordagem para estimar a condutância térmica de contato bidimensional com variação espacial utilizando medidas de temperatura estacionárias;

2. abordagem para estimar a condutância térmica de contato bidimensional com variação espacial utilizando medidas de temperatura transientes. Esta abordagem é dividida em duas metodologias: na metodologia 1 o problema direto é utilizado durante a estimativa. Na metodologia 2 elimina-se a necessidade de solução do problema direto;
3. abordagem para estimar a condutância térmica de contato bidimensional com variação temporal utilizando medidas de temperatura transientes.

Esta técnica utiliza medidas de temperatura não intrusivas e requer baixo tempo computacional quando comparado com técnicas tradicionais. A metodologia 1 da abordagem 2 necessita de um tempo computacional maior uma vez que há a necessidade da solução do problema direto durante a estimativa. Como alternativa propõem-se a metodologia 2.

Este trabalho apresenta uma técnica não intrusiva e não iterativa de estimativa bidimensional, com e sem variação temporal, da condutância térmica de contato. Além disso, o procedimento não usual de escolha do parâmetro de truncamento TSVD, apresentado neste trabalho, possibilita a estimativa em casos reais, uma vez que não é necessário o perfil exato da condutância térmica de contato neste procedimento.



# Capítulo 3

## Problema Direto

Neste trabalho considera-se um problema de condução de calor tridimensional em regime permanente e transiente, com perfil de condutância térmica de contato bidimensional. Dois corpos estão em contato não perfeito, onde o primeiro domínio  $\Omega_1$  tem condutividade térmica  $\kappa_1$ , o segundo domínio  $\Omega_2$  tem condutividade térmica  $\kappa_2$  e existe uma superfície de contato  $\Gamma$  entre eles, na qual se assume ter uma condição de contorno de Robin, isto é,  $-\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = h(T_1 - T_2)$ .

As laterais, tanto do primeiro, quanto do segundo domínio ( $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ), são mantidas isoladas. Na fronteira superior  $\Gamma_0$  um fluxo de calor prescrito é imposto e a fronteira inferior  $\Gamma_\infty$  está sujeita a uma temperatura prescrita. A figura 3.1 mostra a geometria do problema.

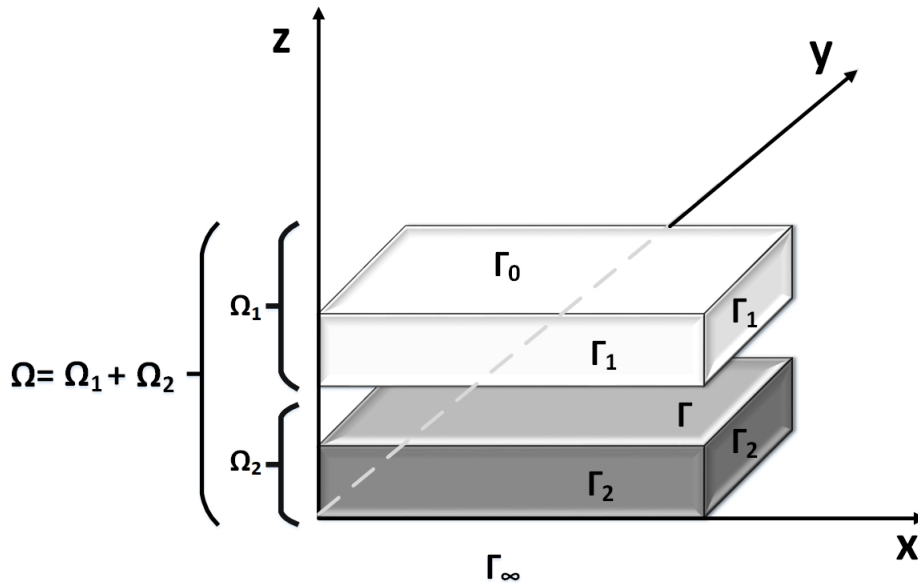


Figura 3.1: Geometria do problema.

### 3.1 Formulação Matemática - Regime Permanente

A formulação matemática deste problema de transferência de calor tridimensional em regime permanente, com condutividades térmicas ( $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ ) constantes, pode ser escrita da seguinte forma:

$$\nabla^2 T_1 = 0 \quad \text{em } \Omega_1 \quad (3.1a)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (3.1b)$$

$$-\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = h(T_1 - T_2) \quad \text{em } \Gamma \quad (3.1c)$$

$$-\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = q \quad \text{em } \Gamma_0 \quad (3.1d)$$

$$\nabla^2 T_2 = 0 \quad \text{em } \Omega_2 \quad (3.1e)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.1f)$$

$$T_2 = 0 \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (3.1g)$$

$$\kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} = -\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} \quad \text{em } \Gamma \quad (3.1h)$$

Avaliando este problema de condução de calor, pode-se observar que caso os materiais estejam em contato perfeito, isto é,  $T_1 = T_2$  na interface  $\Gamma$ , não há resistência térmica de contato entre esses materiais. Então, pode-se afirmar que a condutância térmica de contato tende ao infinito, uma vez que  $h = \frac{1}{R}$ . Quando há uma resistência de contato muito grande, a condutância térmica de contato tende a zero e, com isso, aproxima-se de um caso onde os materiais estão isolados entre si.

As dimensões da geometria utilizada estão apresentadas na figura 3.2. Foram testados quatro perfis de condutância térmica de contato, como pode ser visto na tabela 3.1 e na figura 3.3.

O problema direto foi resolvido com o método de diferenças finitas utilizando o esquema de diferença central clássica com precisão de 2ª ordem. Para solução das equações algébricas resultantes desta formulação foi utilizado o método de Gauss Seidel.

Para apresentar a análise da convergência de malha realizada, foi utilizado o perfil 2 da tabela 3.1 com as configurações presentes na tabela 3.2.

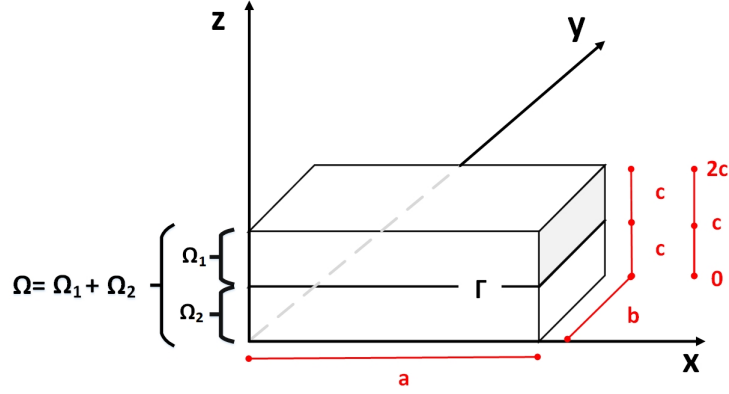


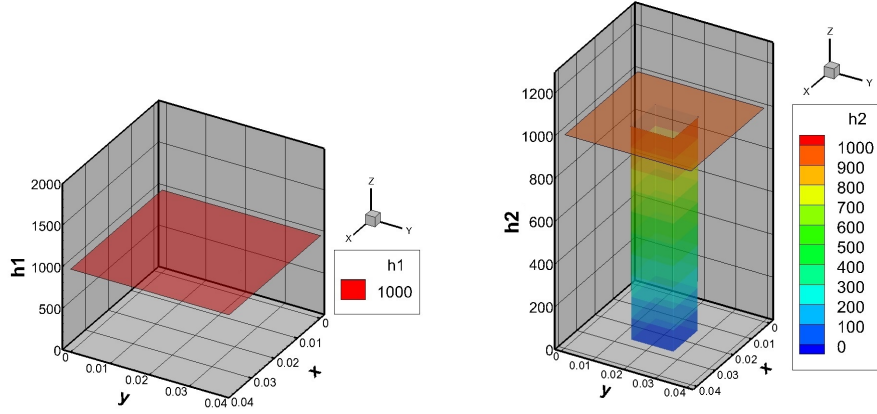
Figura 3.2: Dimensões da geometria.

Tabela 3.1: Perfis de condutância térmica de contato.

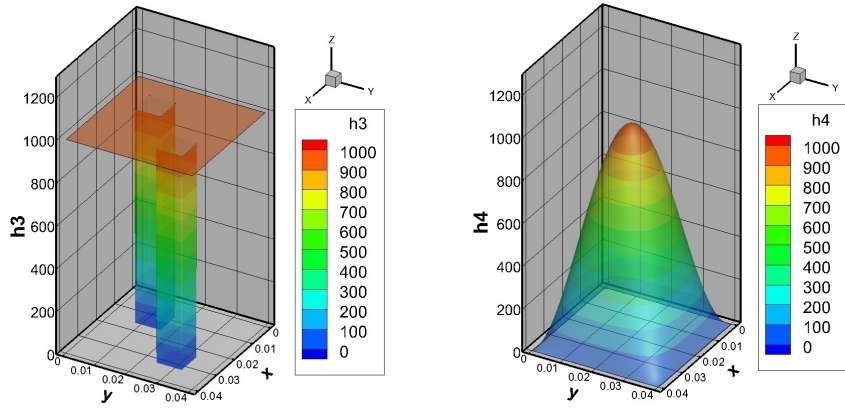
	Perfil - $h$ W/(m <sup>2</sup> °C)
1	$h_1 = 10^3$
2	$h_2 = 10^3$ para $(x < \frac{a}{3})$ e $(x > \frac{2a}{3})$ , $(y < \frac{b}{3})$ e $(y > \frac{2b}{3})$ $h_2 = 0$ para $(\frac{a}{3} \leq x \leq \frac{2a}{3})$ e $(\frac{b}{3} \leq y \leq \frac{2b}{3})$
3	$h_3 = 10^3$ para $(x < \frac{a}{5})$ e $(x > \frac{4a}{5})$ , $(y < \frac{b}{5})$ e $(y > \frac{4b}{5})$ $h_3 = 10^3$ para $(x < \frac{3a}{5})$ e $(x > \frac{2a}{5})$ , $(y < \frac{3b}{5})$ e $(y > \frac{2b}{5})$ $h_3 = 0$ para $(\frac{a}{5} \leq x \leq \frac{2a}{5})$ , $(\frac{b}{5} \leq y \leq \frac{2b}{5})$ $h_3 = 0$ para $(\frac{3a}{5} \leq x \leq \frac{4a}{5})$ , $(\frac{3b}{5} \leq y \leq \frac{4b}{5})$
4	$h_4 = 10^3 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$

Tabela 3.2: Casos para convergência de malha

Casos para convergência de malha	
<b>Configuração 1</b>	$a = 0.04\text{m}$ , $b = 0.04\text{m}$ e $c = 0.01\text{m}$ (para cada domínio) $\kappa_1 = \kappa_2 = 54\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ - Aço (AISI 1050) $q = -10^5\text{W}/\text{m}^2$
<b>Configuração 2</b>	$a = 0.04\text{m}$ , $b = 0.04\text{m}$ e $c = 0.01\text{m}$ (para cada domínio) $\kappa_1 = 14\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ - Inconel e $\kappa_2 = 54\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ - Aço (AISI 1050) $q = -10^5\text{W}/\text{m}^2$
<b>Configuração 3</b>	$a = 0.04\text{m}$ , $b = 0.04\text{m}$ e $c = 0.01\text{m}$ (para cada domínio) $\kappa_1 = 54\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ - Aço (AISI 1050) e $\kappa_2 = 14\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ - Inconel $q = -10^5\text{W}/\text{m}^2$



(a) Condutância Térmica de Contato - Perfil 1      (b) Condutância Térmica de Contato - Perfil 2



(c) Condutância Térmica de Contato - Perfil 3      (d) Condutância Térmica de Contato - Perfil 4

Figura 3.3: Perfis de condutância térmica de contato

Neste trabalho as malhas são apresentadas como  $p_1 \times p_2 \times p_3$ , onde  $p_1$ ,  $p_2$  e  $p_3$  representam o número de pontos na direção  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Foram realizados diferentes testes para encontrar o número necessário de pontos em cada direção para que a malha estivesse convergida até mesmo nos casos com perfis descontínuos.

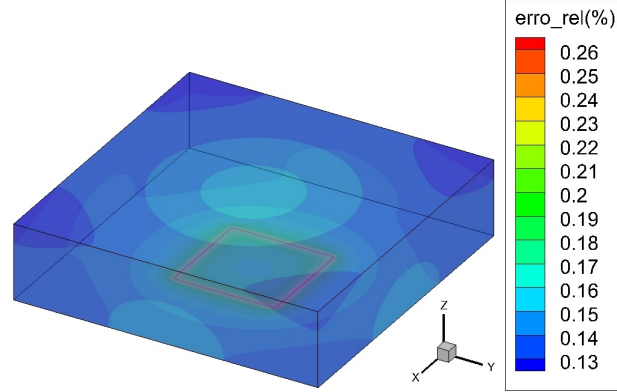
Para verificar a convergência da malha, foi calculado o erro relativo percentual de acordo a Eq. (3.2), onde  $\mathbf{T}_{m1}$  é o campo de temperatura com a malha  $241 \times 241 \times 61$  e  $\mathbf{T}_{m2}$  é o campo de temperatura com a malha  $481 \times 481 \times 121$ .

$$\text{Erro relativo (\%)} = \left( \frac{|\mathbf{T}_{m2} - \mathbf{T}_{m1}|}{\mathbf{T}_{m2}} \right) \times 100 \quad (3.2)$$

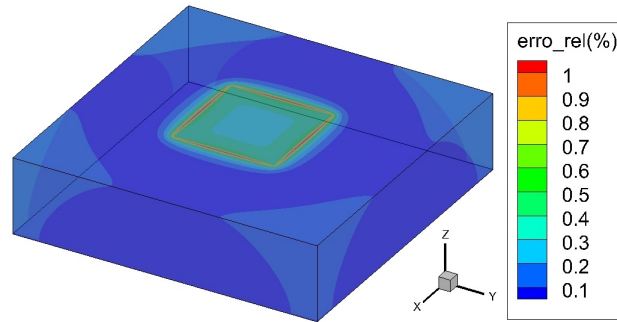
Na superfície  $\Gamma_\infty$ , onde a temperatura prescrita é  $0^\circ\text{C}$ , foi calculado o erro absoluto, isto é, Erro absoluto =  $|\mathbf{T}_{m2} - \mathbf{T}_{m1}|$ .

As figuras 3.4, 3.5 e 3.6 apresentam o erro relativo percentual entre as malhas

$241 \times 241 \times 61$  e  $481 \times 481 \times 121$  para as configurações 1, 2 e 3 da tabela 3.2, respectivamente. Como pode-se observar, o erro relativo percentual fica abaixo de 1.1% em ambos os domínios de todas as configurações. Assim, considerou-se a malha com  $241 \times 241 \times 61$  pontos convergida.



(a) Erro Relativo (%) para o domínio  $\Omega_1$



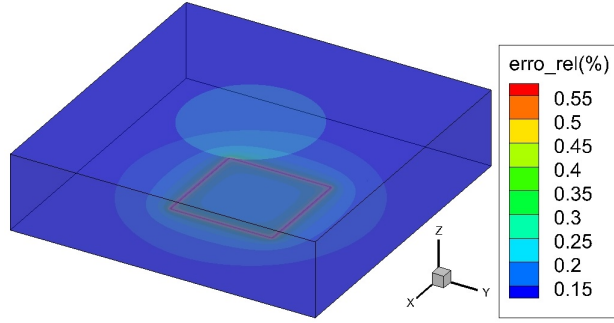
(b) Erro Relativo (%) para o domínio  $\Omega_2$

Figura 3.4: Erro Relativo (%) entre as malhas  $241 \times 241 \times 61$  e  $481 \times 481 \times 121$  -  $\kappa_1 = \kappa_2 = 54\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$

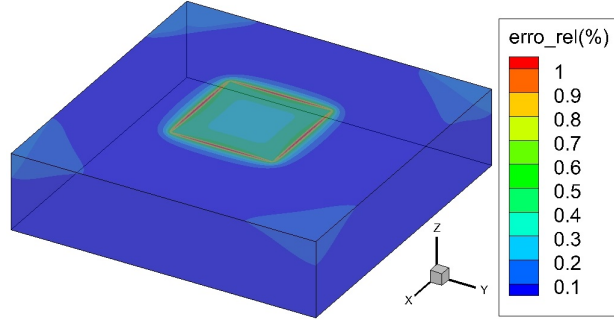
O problema direto foi verificado com o software comercial Comsol Multiphysics 4.4. Para isto, foi utilizado o perfil 4 da tabela 3.1 com a configuração 1 presente na tabela 3.2, modificando somente o fluxo de calor para  $q = -5 \times 10^4\text{W}/\text{m}^2$ . O fluxo de calor foi reduzido neste perfil para que a temperatura na superfície superior ficasse próxima da temperatura dos outros perfis, como será visto no capítulo 5. Como este software trabalha com elementos finitos, foram verificadas somente as superfícies inferior e superior de cada domínio.

A figura 3.7 apresenta o erro relativo percentual entre o Comsol Multiphysics 4.4 com uma malha extremamente fina (1055495 elementos tetraédricos) e o método das diferenças finitas com uma malha  $241 \times 241 \times 61$  nos domínios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , respectivamente.

A figura 3.7a representa a superfície  $z = c$  no domínio  $\Omega_1$ , a qual está na interface entre os dois materiais. Neste caso o erro relativo percentual é pequeno, não passando de 0.01%. Já na superfície onde são feitas as medições de temperatura,

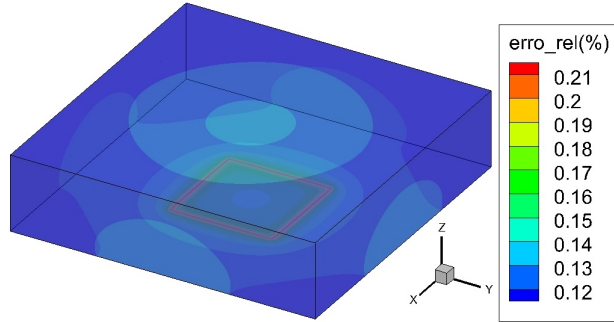


(a) Erro Relativo (%) para o domínio  $\Omega_1$

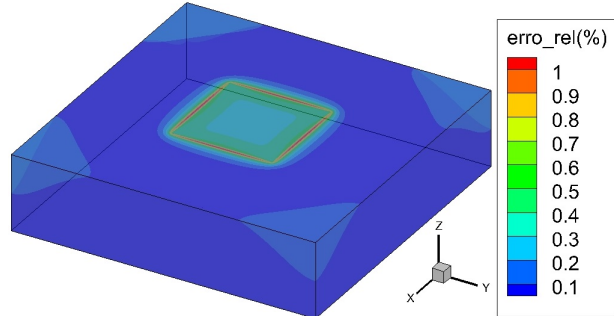


(b) Erro Relativo (%) para o domínio  $\Omega_2$

Figura 3.5: Erro Relativo (%) entre as malhas  $241 \times 241 \times 61$  e  $481 \times 481 \times 121$  -  $\kappa_1 = 14 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$  e  $\kappa_2 = 54 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$



(a) Erro Relativo (%) para o domínio  $\Omega_1$



(b) Erro Relativo (%) para o domínio  $\Omega_2$

Figura 3.6: Erro Relativo (%) entre as malhas  $241 \times 241 \times 61$  e  $481 \times 481 \times 121$  -  $\kappa_1 = 54 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$  e  $\kappa_2 = 14 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$

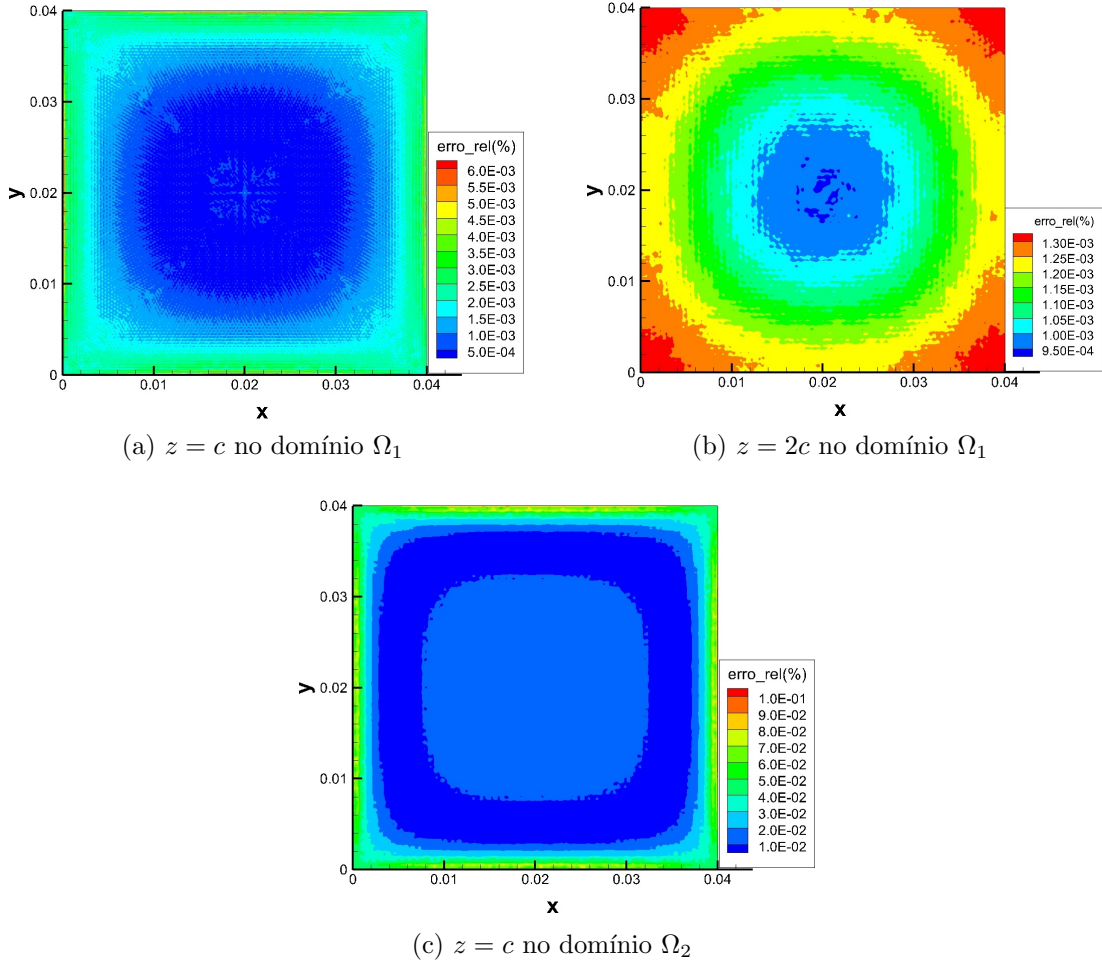


Figura 3.7: Erro Relativo (%) entre o método das diferenças finitas e o Comsol

isto é, superfície  $z = 2c$  no domínio  $\Omega_1$  (ver figura 3.7b), os erros também são bem pequenos e não chegam a 0.01%.

A figura 3.7c que representa a superfície  $z = c$  do domínio  $\Omega_2$ , a qual está na interface entre os dois materiais, apresenta erros de até 0,11%, ainda considerados baixos.

A superfície  $z = 0$  no domínio  $\Omega_2$  possui uma temperatura prescrita  $T = 0^\circ\text{C}$  e, por este motivo, não foi avaliada.

Portanto, o problema direto em regime permanente foi resolvido com uma malha  $241 \times 241 \times 61$  em todos casos apresentados neste trabalho para gerar as medidas sintéticas, assim como para gerar os perfis do salto de temperatura, do fluxo de calor e da condutância térmica de contato de referência.

## 3.2 Formulação Matemática - Regime Transiente

A formulação matemática em regime transiente, com condutividades térmicas ( $\kappa_1$  e  $\kappa_2$ ) constantes, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \nabla^2 T_1 \quad \text{em } \Omega_1, \quad t > 0 \quad (3.3a)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1, \quad t > 0 \quad (3.3b)$$

$$-\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = h(T_1 - T_2) \quad \text{em } \Gamma, \quad t > 0 \quad (3.3c)$$

$$-\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = q \quad \text{em } \Gamma_0, \quad t > 0 \quad (3.3d)$$

$$T_1 = 0 \quad \text{em } \Omega_1, \quad t = 0 \quad (3.3e)$$

$$\frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} = \nabla^2 T_2 \quad \text{em } \Omega_2, \quad t > 0 \quad (3.3f)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} = 0 \quad \text{em } \Gamma_2, \quad t > 0 \quad (3.3g)$$

$$T_2 = 0 \quad \text{em } \Gamma_\infty, \quad t > 0 \quad (3.3h)$$

$$\kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} = -\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} \quad \text{em } \Gamma, \quad t > 0 \quad (3.3i)$$

$$T_2 = 0 \quad \text{em } \Omega_2, \quad t = 0 \quad (3.3j)$$

A geometria e suas dimensões são as mesmas apresentadas na formulação matemática do regime permanente apresentada anteriormente. A condutância térmica de contato é dada pela Eq.(3.4).

$$h(x, y, t) = h(x, y)h(t) \quad (3.4)$$

onde os perfis de condutância térmica de contato estudados no regime transiente são apresentados na tabela 3.3 e na figura 3.8, onde o tempo final  $t_f = 600$  segundos. Os perfis 5, 7 e 8 não variam com o tempo e, por este motivo, foi apresentada somente a variação em  $x$  e  $y$  nas figuras 3.8a, 3.8c e 3.8d. O perfil 6 varia com o tempo e, por este motivo, foi fixado a posição  $x = 0.02$  m, apresentando assim, a variação em  $y$  e em  $t$ , como pode ser visto na figura 3.8b.

O problema direto foi resolvido com o método de diferenças finitas utilizando o esquema explícito simples, o qual é condicionalmente estável [54] e o critério de



Tabela 3.3: Perfis de condutância térmica de contato.

Perfil - h W/(m <sup>2</sup> °C)		
	$h(x, y)$	$h(t)$
5	$h_5 = 10^3$	$h_5 = 1$
6	$h_6 = 10^3$	$h_6 = 0$ para $\left(t < \frac{t_f}{5}\right)$ e $\left(\frac{2t_f}{5} < t < \frac{3t_f}{5}\right)$ e $\left(t > \frac{4t_f}{5}\right)$ $h_6 = 1$ para $\left(\frac{t_f}{5} \leq t \leq \frac{2t_f}{5}\right)$ e $\left(\frac{3t_f}{5} \leq t \leq \frac{4t_f}{5}\right)$
7	$h_7 = 10^3$ para $\left(x < \frac{a}{8}\right)$ e $\left(x > \frac{3a}{8}\right)$ , $\left(y < \frac{b}{8}\right)$ e $\left(y > \frac{3b}{8}\right)$ $h_7 = 10^3$ para $\left(x < \frac{5a}{8}\right)$ e $\left(x > \frac{7a}{8}\right)$ , $\left(y < \frac{5b}{8}\right)$ e $\left(y > \frac{7b}{8}\right)$ $h_7 = 0$ para $\left(\frac{a}{8} \leq x \leq \frac{3a}{8}\right)$ , $\left(\frac{b}{8} \leq y \leq \frac{3b}{8}\right)$ $h_7 = 0$ para $\left(\frac{5a}{8} \leq x \leq \frac{7a}{8}\right)$ , $\left(\frac{5b}{8} \leq y \leq \frac{7b}{8}\right)$	$h_7 = 1$
8	$h_8 = 1000 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$	$h_8 = 1$

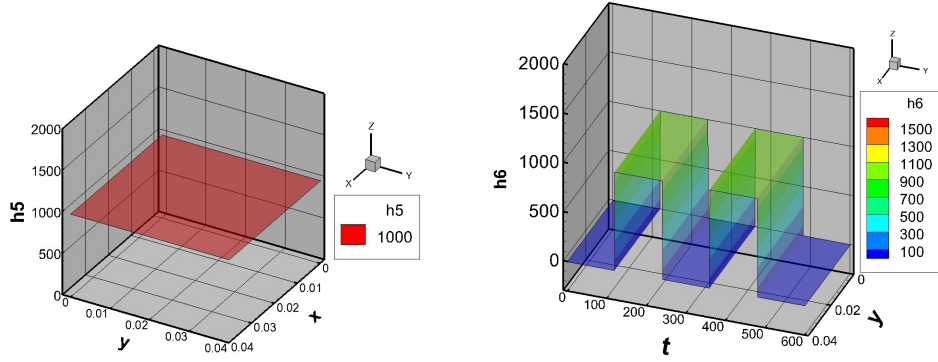
estabilidade é dado pela Eq. (3.5),

$$\left[ \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta x)^2} + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta y)^2} + \frac{\alpha \Delta t}{(\Delta z)^2} \right] \leq \frac{1}{2} \quad (3.5)$$

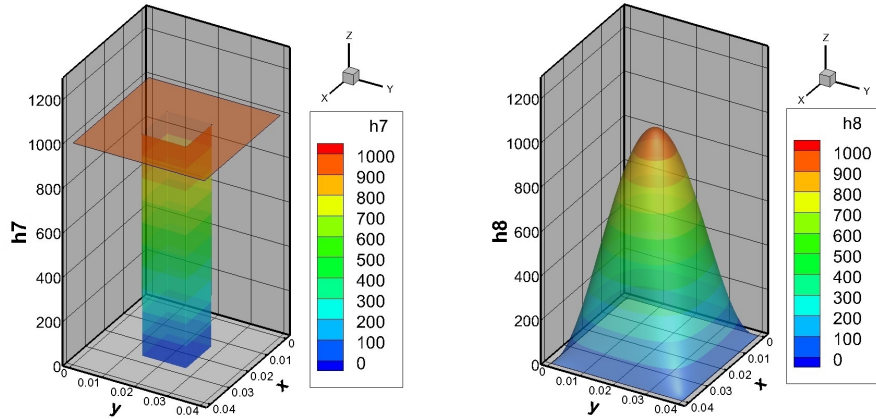
Para atender o critério de estabilidade e realizar a análise de convergência de malha foram utilizadas as malhas:

1.  $241 \times 241 \times 61$  com passo no tempo igual a  $2.5 \times 10^{-4}$ , isto é,  $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4}$
2.  $481 \times 481 \times 121$  com passo no tempo igual a  $6.25 \times 10^{-5}$ , isto é,  $\Delta t = 6.25 \times 10^{-5}$

Para apresentar a análise de convergência de malha realizada, foi utilizado o perfil 7 da tabela 3.3 com as configurações presentes na tabela 3.4. O erro relativo percentual foi calculado de acordo a Eq. (3.2) nos tempos  $t = 25$  e  $100$  segundos, onde  $\mathbf{T}_{m1}$  é o campo de temperatura com a malha  $241 \times 241 \times 61$  e  $\mathbf{T}_{m2}$  é o campo de temperatura com a malha  $481 \times 481 \times 121$ .



(a) Condutância Térmica de Contato - Perfil 5 (b) Condutância Térmica de Contato - Perfil 6



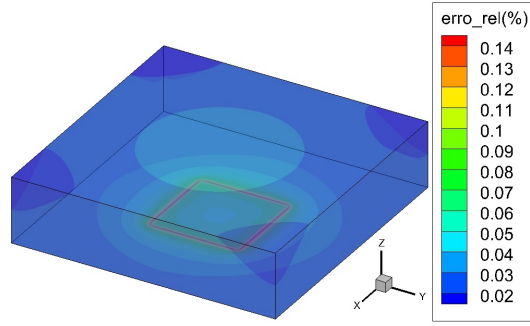
(c) Condutância Térmica de Contato - Perfil 7 (d) Condutância Térmica de Contato - Perfil 8

Figura 3.8: Perfis de condutância térmica de contato

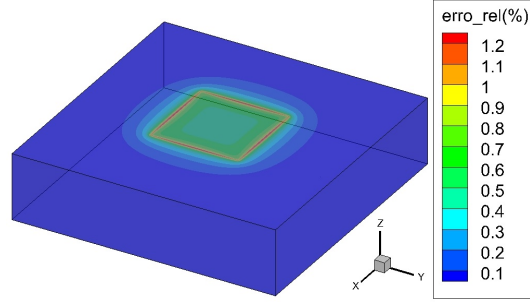
Tabela 3.4: Configuração para convergência de malha

Configuração para convergência de malha
$a = 0.04 \text{ m}$ , $b = 0.04 \text{ m}$ e $c = 0.01 \text{ m}$ (para cada domínio) $\kappa_1 = \kappa_2 = 54 \text{ W/(m}^\circ\text{C)}$ - Aço (AISI 1050) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.474 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ $q = -10^5 \text{ W/m}^2$

As figuras 3.9 e 3.10 apresentam o erro relativo percentual entre as malhas  $241 \times 241 \times 61$  e  $481 \times 481 \times 121$  para os tempos  $t = 25$  e  $100$  segundos, respectivamente. Como pode-se observar, a medida que o tempo aumenta, o erro relativo percentual se aproxima do valor encontrado para este mesmo caso no regime permanente, como pode ser visto na figura 3.4. Da mesma forma que no regime permanente, considerou-se a malha com  $241 \times 241 \times 61$  pontos convergida.

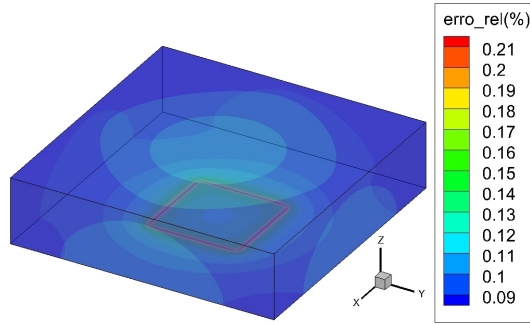


(a) Erro Relativo (%) para o domínio  $\Omega_1$

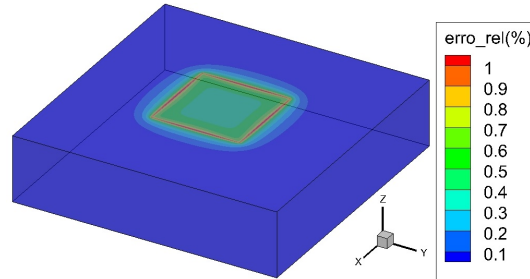


(b) Erro Relativo (%) para o domínio  $\Omega_2$

Figura 3.9: Erro Relativo (%) entre as malhas  $241 \times 241 \times 61$  e  $481 \times 481 \times 121$  -  $t = 25$  segundos



(a) Erro Relativo (%) para o domínio  $\Omega_1$



(b) Erro Relativo (%) para o domínio  $\Omega_2$

Figura 3.10: Erro Relativo (%) entre as malhas  $241 \times 241 \times 61$  e  $481 \times 481 \times 121$  -  $t = 100$  segundos

O problema direto em regime transiente também foi verificado com o software comercial Comsol Multiphysics 4.4. Assim como no regime permanente, somente as superfícies superior e inferior de  $\Omega_1$  e a superfície superior de  $\Omega_2$  serão analisadas. Para isto, foi utilizado o perfil 5 da tabela 3.3 com a configuração presente na tabela 3.4. Como o perfil 5 é constante, o campo de temperatura em  $x$  e  $y$  será constante e, portanto, os erros relativos percentuais entre o método das diferenças finitas e o Comsol Multiphysics serão constantes, como será visto a seguir.

As figuras 3.11, 3.12 e 3.13 apresentam o erro relativo percentual entre o Comsol Multiphysics com uma malha extremamente fina (1055495 elementos) e o método das diferenças finitas com uma malha  $241 \times 241 \times 61$  nos domínios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , respectivamente.

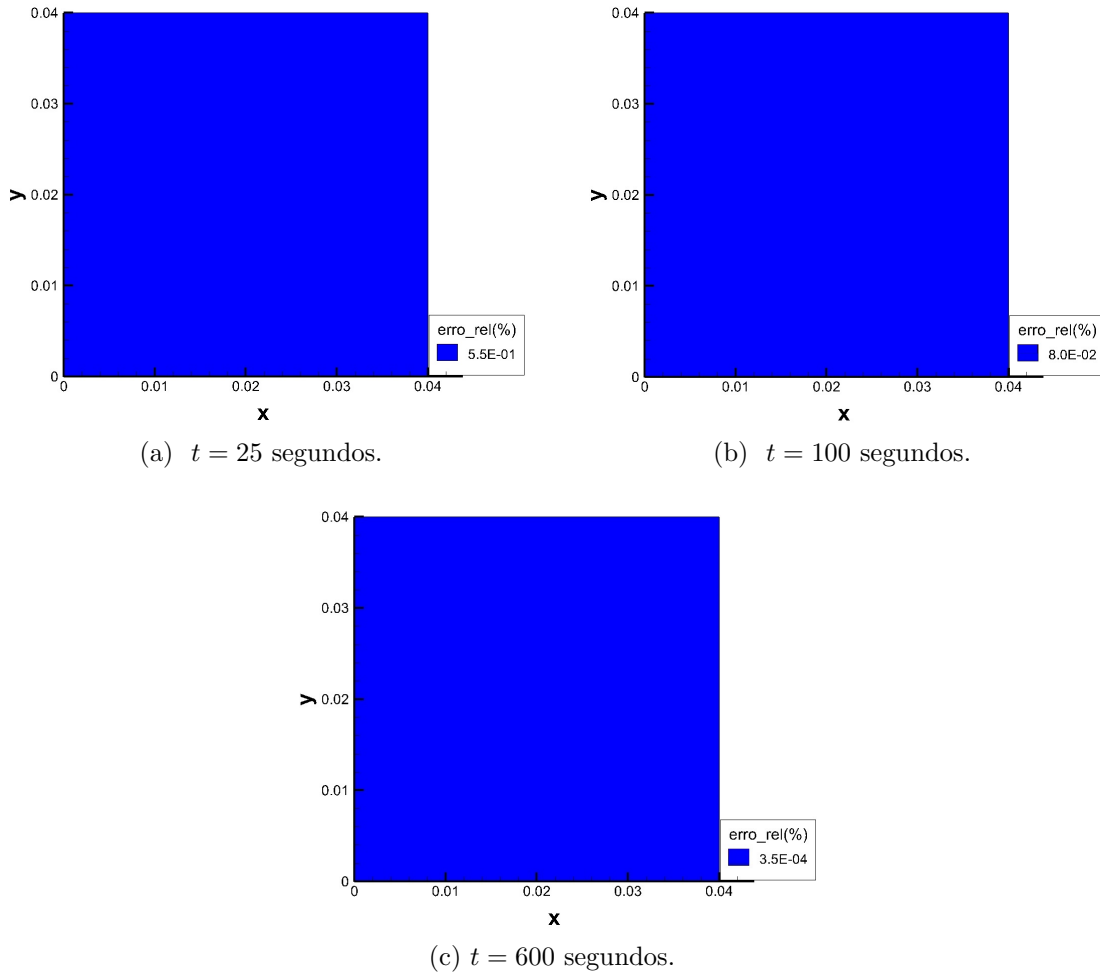
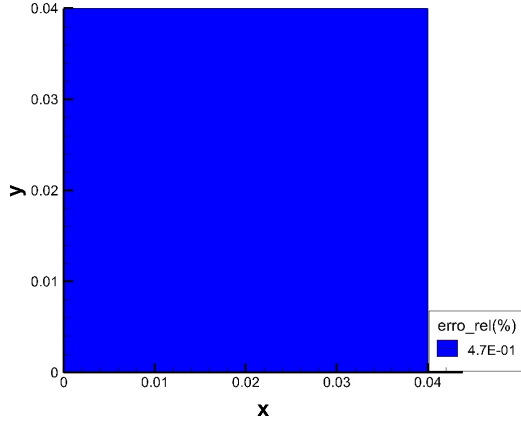


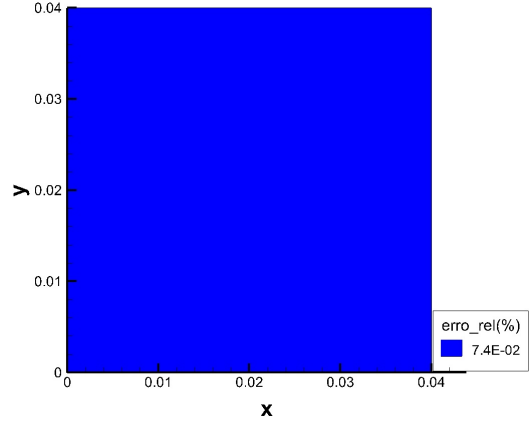
Figura 3.11: Erro Relativo (%) entre o método das diferenças finitas e o Comsol em  $z = c$  no domínio  $\Omega_1$ .

A figura 3.11 representa a superfície  $z = c$  no domínio  $\Omega_1$ , a qual está na interface entre os dois materiais. Pode-se observar que o erro relativo percentual é muito menor no tempo  $t = 600$  segundos mas em todos os tempos analisados, o erro não foi maior que 1%. Já na superfície onde são feitas as medições de temperatura (ver

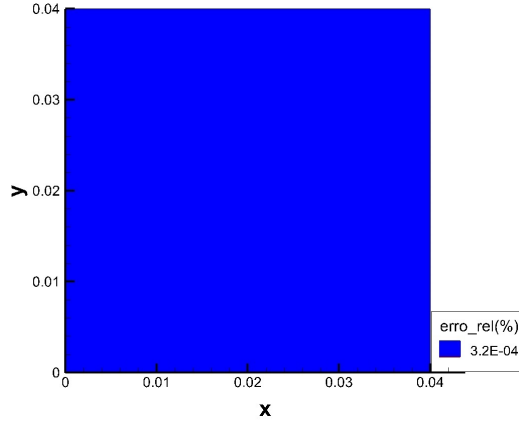
figura 3.12), isto é, superfície  $z = 2c$  no domínio  $\Omega_1$ , os erros são ainda menores em todos os tempos analisados.



(a)  $t = 25$  segundos.



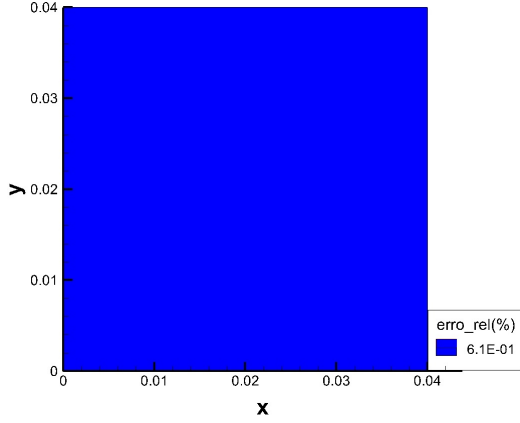
(b)  $t = 100$  segundos.



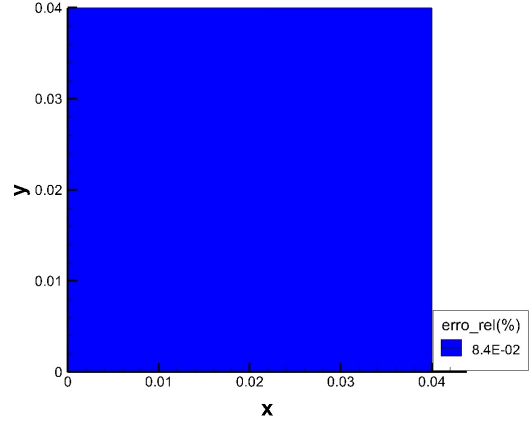
(c)  $t = 600$  segundos.

Figura 3.12: Erro Relativo (%) entre o método das diferenças finitas e o Comsol em  $z = 2c$  no domínio  $\Omega_1$ .

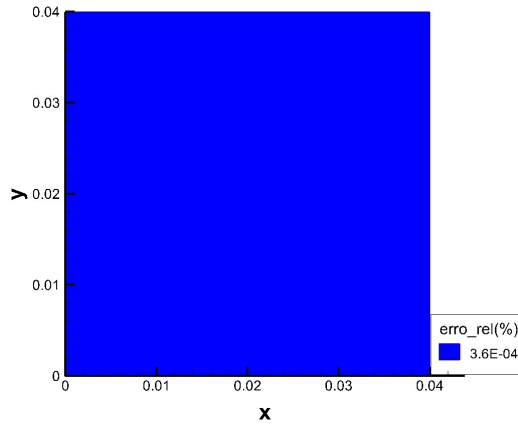
A figura 3.13 representa a superfície  $z = c$  no domínio  $\Omega_2$ . Nesta superfície, o erro relativo percentual é maior do que nas outras superfícies analisadas, mas ainda assim o erro é menor que 1%.



(a)  $t = 25$  segundos.



(b)  $t = 100$  segundos.



(c)  $t = 600$  segundos.

Figura 3.13: Erro Relativo (%) entre o método das diferenças finitas e o Comsol em  $z = c$  no domínio  $\Omega_2$ .

Portanto, após realizar a convergência de malha e verificar o resultado obtido com o Comsol Multiphysics, concluiu-se que a malha com  $241 \times 241 \times 61$  pontos está convergida.

# Capítulo 4

## Problema Inverso

A estimativa unidimensional da condutância térmica de contato utilizando uma abordagem baseada no Funcional de Reciprocidade [20], já foi realizada em outros trabalhos [2, 21–25, 27]. Deve-se ressaltar que no presente trabalho a estimativa da condutância térmica de contato é bidimensional.

Neste capítulo serão apresentadas as metodologias desenvolvidas por COLAÇO e ALVES [21], ABREU *et al.* [22], COLAÇO *et al.* [23], COLAÇO e ALVES [24] e TOUGRI *et al.* [25]. Em todas as metodologias é necessário obter a solução de dois problemas auxiliares, onde o primeiro irá determinar o salto de temperatura e o segundo problema irá determinar o fluxo de calor, ambos na interface entre os dois materiais. Assim, de acordo com a Eq. (2.3) é possível calcular a condutância térmica de contato.

As condições de contorno dos problemas auxiliares são escolhidas de modo que, ao relacionar o problema direto e os problemas auxiliares, seja possível calcular o Funcional de Reciprocidade.

As metodologias serão divididas em três abordagens. Na abordagem 1 será apresentada a metodologia para estimar a condutância térmica de contato em regime permanente utilizando medidas não intrusivas permanentes. Na abordagem 2 serão apresentadas duas metodologias para estimar a condutância térmica de contato em regime permanente utilizando medidas não intrusivas transientes e, por fim, na abordagem 3 será apresentada a metodologia para estimar a condutância térmica de contato em regime transiente utilizando medidas não intrusivas transientes.

Ao todo, serão quatro metodologias estudadas. Estas metodologias nunca foram empregadas em problemas tridimensionais com estimativas bidimensionais. Antes de apresentar tais metodologias, será apresentada uma breve explicação sobre a base de função ortonormal que será necessária na definição dos problemas auxiliares.

Como será visto adiante, para que o método do Funcional de Reciprocidade seja aplicado em um caso real são necessárias algumas informações do problema, como: as dimensões dos materiais em contato, as propriedades termofísicas dos

materiais, as medidas de temperatura e o fluxo de calor aplicado, ambos na superfície superior externa do corpo de prova. Em um caso real, o fluxo de calor aplicado pode ser desconhecido, conhecendo-se apenas as medidas de temperatura decorrentes da aplicação de tal fluxo de calor. Por este motivo, será apresentado um caso numérico de estimativa de fluxo de calor utilizando o Filtro de Kalman.

Ainda neste capítulo, serão apresentados os detalhes dos códigos computacionais desenvolvidos e os métodos utilizados para a solução dos sistemas lineares decorrentes da aplicação das metodologias.

## 4.1 Base de Função Ortonormal

Nesta seção a função  $\psi_j$  será definida como uma base de funções ortonormais no Espaço de Hilbert  $L^2$ . Diferentes bases foram testadas, como a base ortonormal de senos e a base ortonormal de cossenos, entre outras. Os melhores resultados foram obtidos com a base de Fourier e, por este motivo, será a única base considerada neste trabalho.

Como a estimativa é bidimensional, será necessária a utilização de bases nas direções  $x$  e  $y$ . A base ortonormal de Fourier na direção  $x$  é dada por:

$$\psi_x^i = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad \text{para } i = 1 \quad (4.1a)$$

$$\psi_x^i = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \quad \text{para } i = 2, 4, 6, \dots \quad (4.1b)$$

$$\psi_x^i = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{(i-1)\pi x}{a}\right) \quad \text{para } i = 3, 5, 7, \dots \quad (4.1c)$$

Na direção  $y$ , a base ortonormal de Fourier é dada por:

$$\psi_y^k = \frac{1}{\sqrt{b}} \quad \text{para } k = 1 \quad (4.2a)$$

$$\psi_y^k = \sqrt{\frac{2}{b}} \cos\left(\frac{k\pi y}{b}\right) \quad \text{para } k = 2, 4, 6, \dots \quad (4.2b)$$

$$\psi_y^k = \sqrt{\frac{2}{b}} \sin\left(\frac{(k-1)\pi y}{b}\right) \quad \text{para } k = 3, 5, 7, \dots \quad (4.2c)$$

O número total de funções é a multiplicação do número de funções na direção  $x$  pelo número de funções na direção  $y$ , logo,



$$\begin{aligned}
\psi_j &= \psi_x^i \times \psi_y^k \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N_1 \\
&\quad k = 1, 2, \dots, N_2 \\
&\quad j = 1, 2, \dots, N_1 \times N_2
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Para o caso com estimativa transiente, faz-se necessário a utilização de uma base na direção do tempo, dada por:

$$\psi_t^l = \frac{1}{\sqrt{t_f}} \quad \text{para } l = 1 \tag{4.4a}$$

$$\psi_t^l = \sqrt{\frac{2}{t_f}} \cos\left(\frac{l}{2}\frac{\pi t}{t_f}\right) \quad \text{para } l = 2, 4, 6, \dots \tag{4.4b}$$

$$\psi_t^l = \sqrt{\frac{2}{t_f}} \sin\left(\frac{(l-1)}{2}\frac{\pi t}{t_f}\right) \quad \text{para } l = 3, 5, 7, \dots \tag{4.4c}$$

Com isso, nos casos transientes, o número total de funções é a multiplicação do número de funções na direção  $x$  pelo número de funções na direção  $y$  pelo número de funções na direção  $t$ , portanto,

$$\begin{aligned}
\psi_j &= \psi_x^i \times \psi_y^k \times \psi_t^l \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N_1 \\
&\quad k = 1, 2, \dots, N_2 \\
&\quad l = 1, 2, \dots, N_3 \\
&\quad j = 1, 2, \dots, N_1 \times N_2 \times N_3
\end{aligned} \tag{4.5}$$

## 4.2 Abordagem 1

Nesta seção será apresentada a metodologia para estimativa da condutância térmica de contato em regime permanente.

### 4.2.1 Problemas Auxiliares

A partir da abordagem baseada no Funcional de Reciprocidade para identificação de falhas [20, 47, 48], COLAÇO e ALVES [21] desenvolveram uma metodologia para estimar a condutância térmica de contato e, para isso, escreveram dois problemas auxiliares. Como dito anteriormente, estes problemas são utilizados para obter o salto de temperatura e o fluxo de calor, respectivamente, ambos na interface entre os dois materiais.

### Problema Auxiliar 1

Considere o primeiro problema auxiliar para funções harmônicas  $F_1 \in C^2(\Omega_1)$  e  $F_2 \in C^2(\Omega_2)$ , dado pelas Eqs. (4.6a) - (4.6h) [21].

$$\nabla^2 F_{1,j} = 0 \quad \text{em } \Omega_1 \quad (4.6a)$$

$$\kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = \psi_j \quad \text{em } \Gamma \quad (4.6b)$$

$$\frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (4.6c)$$

$$F_{1,j} = F_{2,j} \quad \text{em } \Gamma \quad (4.6d)$$

$$\nabla^2 F_{2,j} = 0 \quad \text{em } \Omega_2 \quad (4.6e)$$

$$\frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (4.6f)$$

$$F_{2,j} = 0 \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (4.6g)$$

$$\kappa_2 \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} = -\kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \quad \text{em } \Gamma \quad (4.6h)$$

A função  $\psi_j$  na Eq. (4.6b) é uma base de funções ortonormais  $L^2(\Gamma)$  definida na seção 4.1. Considere a identidade (4.7) para o domínio  $\Omega_1$ ,

$$0 = \int_{\Omega_1} [F_{1,j}(\nabla^2 T_1) - T_1(\nabla^2 F_{1,j})] d\Omega_1 \quad (4.7)$$

Usando a segunda identidade de Green, tem-se

$$\int_{\Omega_1} [F_{1,j}(\nabla^2 T_1) - T_1(\nabla^2 F_{1,j})] d\Omega_1 = \int_{\partial\Omega_1} \left[ F_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.8)$$

Então,

$$0 = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma} \left[ F_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.9)$$

Usando as condições de contorno (3.1b) e (4.6c), a seguinte expressão é obtida

$$0 = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma} \left[ F_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.10)$$

Usando a condição (3.1d) e o fato das medidas de temperatura  $Y$  serem avaliadas

em  $\Gamma_0$ , tem-se

$$0 = \int_{\Gamma_0} \left[ F_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 + \int_{\Gamma} \left[ F_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma \quad (4.11)$$

Usando outra identidade, agora para o domínio  $\Omega_2$ , pode-se escrever

$$0 = \int_{\Omega_2} [F_{2,j}(\nabla^2 T_2) - T_2(\nabla^2 F_{2,j})] d\Omega_2 \quad (4.12)$$

Usando novamente a segunda identidade de Green e as Eqs. (3.1f),(3.1g),(4.6f) e (4.6g), pode-se obter

$$0 = \int_{\Gamma} \left[ F_{2,j} \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} - T_2 \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} \right] d\Gamma \quad (4.13)$$

Como  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  são constantes e somando as Eqs. (4.11) e (4.13), obtém-se

$$0 = \int_{\Gamma_0} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 + \int_{\Gamma} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} \kappa_2 \left[ F_{2,j} \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} - T_2 \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} \right] d\Gamma \quad (4.14)$$

ou

$$\int_{\Gamma_0} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 = \int_{\Gamma} \left[ -\kappa_2 F_{2,j} \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} - \kappa_1 F_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} \left[ \kappa_2 T_2 \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} + \kappa_1 T_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma \quad (4.15)$$

Usando as Eqs. (3.1h), (4.6d) e (4.6h), tem-se

$$\int_{\Gamma_0} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 = \int_{\Gamma} \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} [T_1 - T_2] d\Gamma \quad (4.16)$$

Então, através da metodologia desenvolvida por ANDRIEUX e ABDA [20], o Funcional de Reciprocidade pode ser definido em termos da função  $F_{1,j}$ , como

$$\Re(F_{1,j}) = \int_{\Gamma_0} \left[ F_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 \quad (4.17)$$

Usando as Eqs. (4.16) e (4.17), obtém-se

$$\Re(F_{1,j})\kappa_1 = \left\langle T_1 - T_2, \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \quad (4.18)$$

Usando a condição de contorno (4.6b), tem-se

$$\Re(F_{1,j})\kappa_1 = \langle T_1 - T_2, \psi_j \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad (4.19)$$

Fazendo a projeção de  $(T_1 - T_2)$  sobre  $\psi_j$ , o salto de temperatura pode ser escrito como

$$[T_1 - T_2]_\Gamma = \sum_j \langle T_1 - T_2, \psi_j \rangle_{L^2(\Gamma)} \psi_j = \sum_j \Re(F_{1,j})\kappa_1 \psi_j \quad (4.20)$$

Para cada função ortonormal  $\psi_j$ , tem-se uma solução de  $F_{1,j}$  e, portanto, um valor de  $\Re(F_{1,j})$ . Assim, através da Eq. (4.20) é possível determinar o salto de temperatura na interface  $\Gamma$ .

## Problema Auxiliar 2

Considere outro problema auxiliar para funções harmônicas  $G_1 \in C^2(\Omega_1)$ , dado pelas Eqs. (4.21a) - (4.21d) [21].

$$\nabla^2 G_{1,j} = 0 \quad \text{em } \Omega_1 \quad (4.21a)$$

$$G_{1,j} = \psi_j \quad \text{em } \Gamma \quad (4.21b)$$

$$\frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (4.21c)$$

$$\frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0 \quad \text{em } \Gamma \quad (4.21d)$$

Novamente, a função  $\psi_j$  na Eq. (4.21b) é uma base ortonormal  $L^2(\Gamma)$ . Usando o mesmo processo descrito para o problema auxiliar 1, tem-se

$$0 = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma} \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.22)$$

Usando as condições de contorno (3.1b) e (4.21c), a seguinte expressão é obtida

$$0 = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma} \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.23)$$

Usando as condições (3.1d) e (4.21d) e o fato das medidas de temperatura  $Y$  serem avaliadas em  $\Gamma_0$ , tem-se

$$0 = \int_{\Gamma_0} \left[ G_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 + \int_{\Gamma} \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma \quad (4.24)$$

Então, como  $\kappa_1$  é constante, tem-se

$$\int_{\Gamma_0} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 = - \int_{\Gamma} \left[ \kappa_1 G_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma \quad (4.25)$$

Definindo o Funcional de Reciprocidade em termos da função  $G_{1,j}$  como

$$\Re(G_{1,j}) = \int_{\Gamma_0} \left[ G_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 \quad (4.26)$$

e usando as Eqs. (4.25) e (4.26), obtém-se

$$\Re(G_{1,j})\kappa_1 = - \left\langle G_{1,j}, \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \quad (4.27)$$

Usando a condição de contorno (4.21b) e fazendo a projeção de  $\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1}$  sobre  $\psi_j$ , o fluxo de calor na interface pode ser escrito como

$$- \left[ \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} \right]_{\Gamma} = - \sum_j \left\langle \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1}, \psi_j \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \psi_j = \sum_j \Re(G_{1,j})\kappa_1 \psi_j \quad (4.28)$$

Para cada função ortonormal  $\psi_j$ , tem-se uma solução de  $G_{1,j}$  e, portanto, um valor de  $\Re(G_{1,j})$ . Assim, através da Eq. (4.28) é possível determinar o fluxo de calor na interface  $\Gamma$ .

### Condutância Térmica de Contato

Após resolver os dois problemas auxiliares definidos previamente, é possível obter a condutância térmica de contato na interface inacessível  $\Gamma$  através das Eqs. (2.3), (4.20) e (4.28),

$$h \equiv \frac{\sum_j \Re(G_{1,j})\psi_j}{\sum_j \Re(F_{1,j})\psi_j} \quad (4.29)$$

Os problemas para  $F_{1,j}$  e  $G_{1,j}$  possuem duas condições de contorno em  $\Gamma$  e nenhuma condição de contorno em  $\Gamma_0$ , logo são considerados problemas de Cauchy. Em COLAÇO e ALVES [21], o *Método das Soluções Fundamentais* [55], que é um método de solução numérica sem malha, foi utilizado para a solução destes problemas.

A fim de simplificar esta metodologia, ABREU *et al.* [22] fizeram uma modi-

ficação nos problemas auxiliares, fazendo com que estes problemas deixassem de ter duas condições de contorno na mesma superfície. Com isso, evitaram a solução dos problemas de Cauchy, fazendo com que técnicas tradicionais pudessem ser usadas. Em contrapartida, algumas etapas extras são necessárias.

Nesta fase do trabalho, utilizaremos os problemas auxiliares como feito em [22], mas considerando um problema de condução de calor em estado estacionário tridimensional com perfil de condutância térmica de contato bidimensional. Os problemas auxiliares modificados serão apresentados a seguir.

## 4.2.2 Problemas Auxiliares Modificados

### Problema Auxiliar 1 Modificado

Considere o primeiro problema auxiliar para funções harmônicas  $F_1 \in C^2(\Omega_1)$  e  $F_2 \in C^2(\Omega_2)$ , dado pelas Eqs. (4.30a) - (4.30h) [21, 22].

$$\nabla^2 F_{1,j} = 0 \quad \text{em } \Omega_1 \quad (4.30a)$$

$$F_{1,j} = \psi_j \quad \text{em } \Gamma_0 \quad (4.30b)$$

$$\frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (4.30c)$$

$$F_{1,j} = F_{2,j} \quad \text{em } \Gamma \quad (4.30d)$$

$$\nabla^2 F_{2,j} = 0 \quad \text{em } \Omega_2 \quad (4.30e)$$

$$\frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (4.30f)$$

$$F_{2,j} = 0 \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (4.30g)$$

$$\kappa_2 \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} = -\kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \quad \text{em } \Gamma \quad (4.30h)$$

Observe que a Eq. (4.6b), dada por  $\kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = \psi_j$  em  $\Gamma$ , é substituída por uma condição de contorno em  $\Gamma_0$ . Com isso, todas superfícies passam a ter uma condição de contorno, evitando a solução de um problema de Cauchy.

A função  $\psi_j$  na Eq. (4.30b) é uma base de funções ortonormais  $L^2(\Gamma)$ , definida na seção 4.1. Repetindo o mesmo processo do problema auxiliar 1 da seção anterior, chega-se na definição do Funcional de Reciprocidade para  $F_{1,j}$ , dado pela Eq. (4.31).

$$\Re(F_{1,j})\kappa_1 = \left\langle T_1 - T_2, \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \quad (4.31)$$

Até a definição do Funcional de Reciprocidade, o procedimento é o mesmo desenvolvido no problema auxiliar 1 da seção anterior, mas com a modificação, o novo problema auxiliar não possui a condição de contorno  $\kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = \psi_j$  em  $\Gamma$  e, por este motivo, alguns passos extras são acrescentados, os quais serão apresentados a seguir.

Definindo [22],

$$\beta_j = \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \quad \text{em } \Gamma \quad (4.32)$$

pode-se escrever a Eq. (4.31) da seguinte forma

$$\Re(F_{1,j})\kappa_1 = \langle T_1 - T_2, \beta_j \rangle_{L^2(\Gamma)} \quad (4.33)$$

Considerando que o salto de temperatura na interface  $\Gamma$  pode ser escrito como [22]

$$[T_1 - T_2]_\Gamma = \sum_i \zeta_i \beta_i \quad (4.34)$$

e usando as Eqs. (4.33) e (4.34), tem-se [22]

$$\Re(F_{1,j})\kappa_1 = \langle \beta_j, \beta_i \rangle_{L^2(\Gamma)} \zeta_i \quad (4.35)$$

onde os coeficientes ( $\zeta_i$ ) podem ser obtidos a partir da solução do sistema dado pela Eq. (4.35) e, portanto, através da Eq. (4.34), o salto de temperatura na interface ( $[T_1 - T_2]_\Gamma$ ) é obtido. Deve-se salientar que, neste trabalho, utiliza-se a notação indicial, onde a repetição de um índice representa um somatório com respeito a este índice, como pode ser visto na Eq. (4.35). Escrevendo a Eq. (4.35) na forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} \int_\Gamma (\beta_1 \beta_1) d\Gamma & \cdots & \int_\Gamma (\beta_1 \beta_N) d\Gamma \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_\Gamma (\beta_N \beta_1) d\Gamma & \cdots & \int_\Gamma (\beta_N \beta_N) d\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 \Re(F_{1,1}) \\ \vdots \\ \kappa_1 \Re(F_{1,N}) \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

Deve-se ressaltar que a Eq. (4.32) não é uma condição contorno. Após a solução do problema auxiliar 1 modificado e, utilizando a Eq. (4.32), é possível calcular os valores  $\beta_j$ . Note que, se forem utilizados dois materiais iguais, isto é,  $\kappa_1 = \kappa_2$ , o problema auxiliar 1 pode ser simplificado, como pode ser visto nas Eqs. (4.37a)-(4.37d).

$$\nabla^2 F_{1,j} = 0 \quad \text{em } \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad (4.37a)$$

$$F_{1,j} = \psi_j \quad \text{em } \Gamma_0 \quad (4.37b)$$

$$\frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad (4.37c)$$

$$F_{1,j} = 0 \quad \text{em } \Gamma_\infty \quad (4.37d)$$

### Problema Auxiliar 2 Modificado

Considere outro problema auxiliar para funções harmônicas  $G_1 \in C^2(\Omega_1)$ , dado pelas Eqs. (4.38a) - (4.38d) [21, 22].

$$\nabla^2 G_{1,j} = 0 \quad \text{em } \Omega_1 \quad (4.38a)$$

$$G_{1,j} = \psi_j \quad \text{em } \Gamma_0 \quad (4.38b)$$

$$\frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (4.38c)$$

$$\frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0 \quad \text{em } \Gamma \quad (4.38d)$$

A Eq. (4.21b), dada por  $G_{1,j} = \psi_j$  em  $\Gamma$ , é substituída por uma condição de contorno em  $\Gamma_0$ . Como no problema auxiliar 1 modificado, todas superfícies passam a ter uma condição de contorno.

Novamente, a função  $\psi_j$  na Eq. (4.38b) é uma base ortonormal  $L^2(\Gamma)$ . Repetindo o mesmo processo do problema auxiliar 2 da seção anterior, chega-se na definição do Funcional de Reciprocidade para  $G_{1,j}$ , dado pela Eq. (4.39).

$$\Re(G_{1,j})\kappa_1 = - \left\langle G_{1,j}, \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \quad (4.39)$$

Novamente, até a definição do Funcional de Reciprocidade, o procedimento é o mesmo desenvolvido no problema auxiliar 2 da seção anterior, mas sem a condição de contorno  $G_{1,j} = \psi_j$  em  $\Gamma$ . Alguns passos extras são acrescentados, os quais serão apresentados a seguir. Definindo [22],

$$\phi_j = G_{1,j} \quad \text{em } \Gamma \quad (4.40)$$



é possível escrever a Eq. (4.39), da seguinte forma

$$\Re(G_{1,j})\kappa_1 = - \left\langle \phi_j, \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \quad (4.41)$$

Considerando que o fluxo de calor na interface inacessível  $\Gamma$  pode ser escrito como [22]

$$- \left[ \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} \right]_{\Gamma} = \sum_i \gamma_i \phi_i \quad (4.42)$$

e, usando as Eqs. (4.41) e (4.42), pode-se escrever [22]

$$\Re(G_{1,j})\kappa_1 = \langle \phi_j, \phi_i \rangle_{L^2(\Gamma)} \gamma_i \quad (4.43)$$

onde os coeficientes desconhecidos ( $\gamma_i$ ) podem ser obtidos pela solução do sistema dado pela Eq. (4.43) e, portanto, através da Eq. (4.42), o fluxo de calor, na interface inacessível  $\Gamma$ , é obtido. Escrevendo a Eq. (4.43) na forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} \int_{\Gamma} (\phi_1 \phi_1) d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma} (\phi_1 \phi_N) d\Gamma \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Gamma} (\phi_N \phi_1) d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma} (\phi_N \phi_N) d\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 \Re(G_{1,1}) \\ \vdots \\ \kappa_1 \Re(G_{1,N}) \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Assim como no problema auxiliar modificado 1, deve-se ressaltar que a Eq. (4.40) não é uma condição contorno. Após a solução do problema auxiliar modificado 2 e, utilizando a Eq. (4.40), é possível calcular os valores  $\phi_j$ .

## Condutância Térmica de Contato

Após resolver os dois problemas auxiliares definidos previamente e os dois sistemas lineares dados pelas Eqs (4.36) e (4.44), é possível obter a condutância térmica de contato na interface inacessível  $\Gamma$ , através das Eqs. (2.3), (4.34) e (4.42),

$$h \equiv \frac{\sum_i \gamma_i \phi_i}{\sum_i \zeta_i \beta_i} \quad (4.45)$$

Nota-se que a estimativa obtida com este método não depende explicitamente de fatores como pressão, rugosidade dos materiais na interface e o fluido presente nas cavidades interfaciais. Isto significa que o método utilizado pode ser aplicado para diferentes combinações destes fatores.

## Convergência dos Problemas Auxiliares Modificados

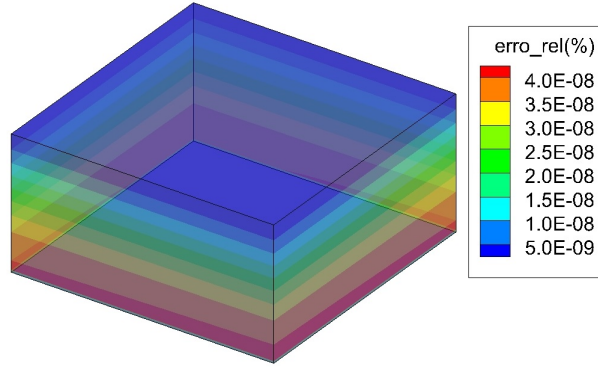
Os problemas auxiliares modificados foram resolvidos utilizando o método de diferenças finitas com esquema de diferença central clássica com precisão de 2ª ordem.

Uma análise de convergência de malha foi realizada e, portanto, foram analisadas as malhas do problema auxiliar 1 com dois materiais iguais e com dois materiais diferentes, assim como a malha do problema auxiliar 2. Para avaliar a convergência, considerou-se 1 função em cada direção na definição da base ortonormal, isto é,  $\psi_1 = \psi_x^1 \times \psi_y^1$ .

O erro relativo percentual foi calculado de acordo a Eq. (4.46), onde  $\mathbf{Fh}_{m1}$  é o campo da função harmônica com uma malha contendo  $121 \times 121 \times 31$  pontos e  $\mathbf{Fh}_{m2}$  é o campo da função harmônica com uma malha contendo  $241 \times 241 \times 61$  pontos.

$$\text{Erro relativo (\%)} = \left( \frac{|\mathbf{Fh}_{m2} - \mathbf{Fh}_{m1}|}{\mathbf{Fh}_{m2}} \right) \times 100 \quad (4.46)$$

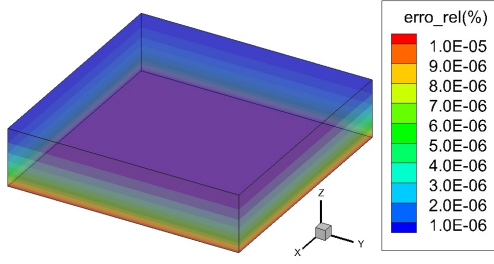
A figura 4.1 apresenta o erro relativo (%) entre as malhas  $121 \times 121 \times 31$  e  $241 \times 241 \times 61$  para o caso com dois materiais iguais ( $\kappa_1 = \kappa_2 = 54 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ ). Neste caso, o problema auxiliar modificado 1 pode ser simplificado, como foi visto nas Eqs. (4.37a) - (4.37d) e, por este motivo, é apresentado um único domínio ( $\Omega_1 \cup \Omega_2$ ). Como pode ser observado, o erro relativo percentual é muito pequeno mostrando a convergência da malha com  $121 \times 121 \times 31$  pontos.



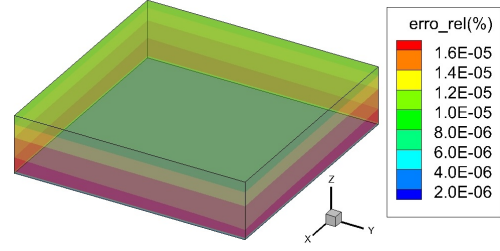
(a) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 1

Figura 4.1: Erro Relativo (%) entre as malhas  $121 \times 121 \times 31$  e  $241 \times 241 \times 61$  -  $\kappa_1 = \kappa_2 = 54 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$

Esse mesmo comportamento pode ser observado com a mudança dos materiais. As figuras 4.2 e 4.3 apresentam o erro relativo (%) entre as malhas  $121 \times 121 \times 31$  e  $241 \times 241 \times 61$  para os casos com  $\kappa_1 = 14 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$  e  $\kappa_2 = 54 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ , bem como  $\kappa_1 = 54 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$  e  $\kappa_2 = 14 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ , respectivamente. Nos dois casos, apesar do erro ser maior do que no caso com dois materiais iguais, ainda assim é muito baixo.

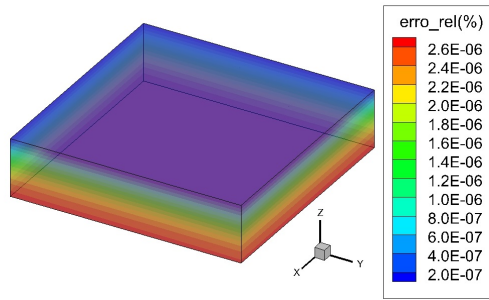


(a) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 1 no domínio  $\Omega_1$

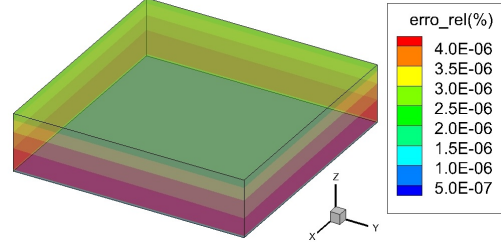


(b) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 1 no domínio  $\Omega_2$

Figura 4.2: Erro Relativo (%) entre as malhas  $121 \times 121 \times 31$  e  $241 \times 241 \times 61$  -  $\kappa_1 = 14 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$  e  $\kappa_2 = 54 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$



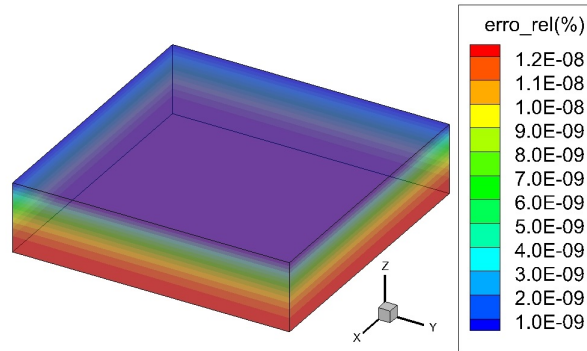
(a) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 1 no domínio  $\Omega_1$



(b) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 1 no domínio  $\Omega_2$

Figura 4.3: Erro Relativo (%) entre as malhas  $121 \times 121 \times 31$  e  $241 \times 241 \times 61$  -  $\kappa_1 = 54 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$  e  $\kappa_2 = 14 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$

O problema auxiliar modificado 2 não depende da escolha do material. A figura 4.4 apresenta o erro relativo (%) entre as malhas  $121 \times 121 \times 31$  e  $241 \times 241 \times 61$  para o problema auxiliar modificado 2, mostrando um erro muito baixo. Conclui-se que a malha contendo  $121 \times 121 \times 31$  pontos está convergida, independente da escolha do material.



(a) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 2

Figura 4.4: Erro Relativo (%) entre as malhas  $121 \times 121 \times 31$  e  $241 \times 241 \times 61$

## Observações

- Neste trabalho foram utilizados os problemas auxiliares modificados. Por este motivo, a partir deste ponto do trabalho todas as vezes que os problemas auxiliares forem citados, será em referência aos problemas auxiliares modificados;
- As dimensões da geometria dos problemas auxiliares são as mesmas dimensões utilizadas no problema direto;
- Como visto anteriormente, uma convergência de malha foi realizada e os problemas auxiliares foram resolvidos com uma malha contendo  $121 \times 121 \times 31$  pontos. As medidas de temperatura foram geradas resolvendo o problema direto com uma malha contendo  $241 \times 241 \times 61$  pontos;
- Os problemas auxiliares não dependem do problema direto. Eles só devem possuir a mesma geometria e a mesma condutividade térmica;
- Os problemas auxiliares são resolvidos para várias funções  $\psi_j$ ;
- A função  $\psi_j$  é uma base de funções ortonormais  $L^2(\Gamma)$ , sendo que neste trabalho foi utilizada a base de Fourier;
- A condutância térmica de contato é bidimensional, logo deve-se usar uma base em duas direções  $\psi_j = \psi_x^i \times \psi_y^k$ ;
- O número de funções usadas é a multiplicação do número de funções na direção  $x$  pelo número de funções na direção  $y$ ;
- A solução dos problemas auxiliares não muda quando o fluxo de calor aplicado ou o tipo de falha são alterados, sendo modificado somente o cálculo do Funcional de Reciprocidade e, conseqüentemente, o sistema linear a ser resolvido. Portanto, diferentes perfis de condutância térmica de contato podem ser recuperados resolvendo os problemas auxiliares uma única vez.

## 4.3 Abordagem 2

Nesta abordagem a estimativa bidimensional da condutância térmica de contato em regime permanente é realizada utilizando medidas de temperatura transientes. Esta abordagem será dividida em duas metodologias. Na metodologia 1 o problema direto é utilizado na solução do problema inverso, tornando o método iterativo. Já na metodologia 2 não é necessária a solução do problema direto no processo de estimativa. Em ambas as metodologias, os problemas auxiliares utilizados são os mesmos apresentados nas Eqs. (4.30a) - (4.30h) e (4.38a) - (4.38d). Em relação ao problema direto, são utilizadas as equações transientes (Eqs. (3.3a) - (3.3j)), uma vez que as medidas de temperatura são transientes.

### 4.3.1 Metodologia 1

Esta metodologia foi apresentada de maneira similar em COLAÇO *et al.* [23], onde a estimativa da condutância térmica de contato é unidimensional e os problemas auxiliares são problemas de Cauchy. Já no presente trabalho, a estimativa é bidimensional e os problemas auxiliares não possuem duas condições de contorno em uma mesma superfície. Utilizam-se os problemas auxiliares como apresentados em ABREU *et al.* [22], isto é, os problemas auxiliares modificados mostrados na seção 4.2.2.

Para a determinação do salto de temperatura na interface, considere a identidade (4.47) para o domínio  $\Omega_1$ ,

$$I_{\Omega_1} = \int_{\Omega_1} [F_{1,j}(\nabla^2 T_1) - T_1(\nabla^2 F_{1,j})] d\Omega_1 \quad (4.47)$$

Usando a segunda identidade de Green, tem-se

$$\int_{\Omega_1} [F_{1,j}(\nabla^2 T_1) - T_1(\nabla^2 F_{1,j})] d\Omega_1 = \int_{\partial\Omega_1} \left[ F_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.48)$$

Do problema direto em regime transiente, sabemos que  $\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \nabla^2 T_1$  em  $\Omega_1$ , cf. Eq. (3.3a),  $\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = 0$  em  $\Gamma_1$  cf. Eq. (3.3b) e que  $-\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = q$  em  $\Gamma_0$  cf. Eq. (3.3d). Do problema auxiliar 1 sabemos que:  $\nabla^2 F_{1,j} = 0$  em  $\Omega_1$  cf. Eq. (4.30a) e  $\frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0$  em  $\Gamma_1$  cf. Eq. (4.30c). Utilizando essas condições e o fato das medidas de temperatura  $Y$  serem avaliadas em  $\Gamma_0$ , a Eq. (4.48) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \left[ F_{1,j} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1 &= \int_{\Gamma_0} \left[ F_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 + \\ &+ \int_{\Gamma} \left[ F_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.49)$$

Usando outra identidade, agora para o domínio  $\Omega_2$ , pode-se escrever

$$I_{\Omega_2} = \int_{\Omega_2} [F_{2,j}(\nabla^2 T_2) - T_2(\nabla^2 F_{2,j})] d\Omega_2 \quad (4.50)$$

Usando novamente a segunda identidade de Green, tem-se

$$\int_{\Omega_2} [F_{2,j}(\nabla^2 T_2) - T_2(\nabla^2 F_{2,j})] d\Omega_2 = \int_{\partial\Omega_2} \left[ F_{2,j} \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} - T_2 \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} \right] d(\partial\Omega_2) \quad (4.51)$$

Do problema direto em regime transiente sabemos que  $\frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} = \nabla^2 T_2$  em  $\Omega_2$  cf. Eq. (3.3f),  $\frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} = 0$  em  $\Gamma_2$  cf. Eq. (3.3g) e que  $T_2 = 0$  em  $\Gamma_\infty$  cf. Eq. (3.3h). Do problema auxiliar 1 sabemos que  $\nabla^2 F_{2,j} = 0$  em  $\Omega_2$  cf. Eq. (4.30e),  $\frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} = 0$  em  $\Gamma_2$  cf. Eq. (4.30f) e  $F_{2,j} = 0$  em  $\Gamma_\infty$  cf. Eq. (4.30g). Utilizando essas condições, a Eq. (4.51) pode ser reescrita como

$$\int_{\Omega_2} \left[ F_{2,j} \left( \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \right) \right] d\Omega_2 = \int_{\Gamma} \left[ F_{2,j} \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} - T_2 \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} \right] d\Gamma \quad (4.52)$$

Como  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  são constantes e somando as Eqs. (4.49) e (4.52), obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \kappa_2 \left[ F_{2,j} \left( \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \right) \right] d\Omega_2 &= \\ &= \int_{\Gamma_0} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 + \\ &+ \int_{\Gamma} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} \kappa_2 \left[ F_{2,j} \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} - T_2 \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.53)$$

Do problema direto em regime transiente sabemos que  $\kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} = -\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1}$  em  $\Gamma$  cf. Eq. (3.3i). Do problema auxiliar 1 sabemos que  $F_{1,j} = F_{2,j}$  em  $\Gamma$  cf. Eq. (4.30d) e  $\kappa_2 \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} = -\kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1}$  em  $\Gamma$  cf. Eq. (4.30h). Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \kappa_2 \left[ F_{2,j} \left( \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \right) \right] d\Omega_2 = \\ \int_{\Gamma_0} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 + \int_{\Gamma} \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} [T_2 - T_1] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.54)$$

Então, através da metodologia desenvolvida por ANDRIEUX e ABDA [20], o Funcional de Reciprocidade pode ser definido em termos da função  $F_{1,j}$ , como

$$\Re(F_{1,j}) = \int_{\Gamma_0} \left[ F_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 \quad (4.55)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Re(F_{1,j})\kappa_1 = \int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \kappa_2 \left[ F_{2,j} \left( \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \right) \right] d\Omega_2 + \\ + \left\langle T_1 - T_2, \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \end{aligned} \quad (4.56)$$

A partir da Eq. (4.56), a presente metodologia difere da metodologia apresentada em COLAÇO *et al.* [23] uma vez que os problemas auxiliares são distintos. Definindo [22],

$$\beta_j = \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \quad \text{em } \Gamma \quad (4.57)$$

e considerando que o salto de temperatura na interface pode ser escrito como [22]

$$[T_1 - T_2]_{\Gamma} = \sum_i \zeta_i \beta_i \quad (4.58)$$

podemos escrever a Eq. (4.56) como

$$\begin{aligned} \Re(F_{1,j})\kappa_1 - \int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} \kappa_2 \left[ F_{2,j} \left( \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \right) \right] d\Omega_2 = \\ = \langle \beta_j, \beta_i \rangle_{L^2(\Gamma)} \zeta_i \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde os coeficientes  $(\zeta_i)$  podem ser obtidos a partir da solução do sistema dado pela Eq. (4.59) e, portanto, através da Eq. (4.58), o salto de temperatura na interface  $([T_1 - T_2]_{\Gamma})$  é obtido. Escrevendo a Eq. (4.59) na forma matricial, temos

$$\begin{pmatrix} \int_{\Gamma} (\beta_1 \beta_1) d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma} (\beta_1 \beta_N) d\Gamma \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Gamma} (\beta_N \beta_1) d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma} (\beta_N \beta_N) d\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re(F_{1,1})\kappa_1 - \int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ F_{1,1} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} \kappa_2 \left[ F_{2,1} \left( \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \right) \right] d\Omega_2 \\ \vdots \\ \Re(F_{1,N})\kappa_1 - \int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ F_{1,N} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} \kappa_2 \left[ F_{2,N} \left( \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \right) \right] d\Omega_2 \end{pmatrix} \quad (4.60)$$

Para a determinação do fluxo de calor na interface, considere a identidade (4.61) para o domínio  $\Omega_1$ ,

$$I_{\Omega_1} = \int_{\Omega_1} [G_{1,j}(\nabla^2 T_1) - T_1(\nabla^2 G_{1,j})] d\Omega_1 \quad (4.61)$$

Usando a segunda identidade de Green, tem-se,

$$\int_{\Omega_1} [G_{1,j}(\nabla^2 T_1) - T_1(\nabla^2 G_{1,j})] d\Omega_1 = \int_{\partial\Omega_1} \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.62)$$

Do problema direto em regime transiente sabemos que  $\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \nabla^2 T_1$  em  $\Omega_1$  cf. Eq. (3.3a),  $\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = 0$  em  $\Gamma_1$  cf. Eq. (3.3b) e que  $-\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = q$  em  $\Gamma_0$  cf. Eq. (3.3d). Do problema auxiliar 2 sabemos que  $\nabla^2 G_{1,j} = 0$  em  $\Omega_1$  cf. Eq. (4.38a),  $\frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0$  em  $\Gamma_1$  cf. Eq. (4.38c) e  $\frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0$  em  $\Gamma$  cf. Eq. (4.38d). Utilizando essas condições, o fato das medidas de temperatura  $Y$  serem avaliadas em  $\Gamma_0$  e como  $\kappa_1$  é constante, a Eq. (4.62) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1 &= \int_{\Gamma_0} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 \\ &\quad + \int_{\Gamma} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.63)$$

Pela definição do Funcional de Reciprocidade para  $G_{1,j}$ , tem-se,

$$\Re(G_{1,j}) = \int_{\Gamma_0} \left[ G_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 \quad (4.64)$$

Definindo [22],



$$\phi_j = G_{1,j} \quad \text{em} \quad \Gamma \quad (4.65)$$

e considerando que o fluxo de calor na interface inacessível  $\Gamma$  pode ser escrito como [22],

$$-\left[\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1}\right]_{\Gamma} = \sum_i \gamma_i \phi_i \quad (4.66)$$

podemos escrever a Eq. (4.63) como:

$$\Re(G_{1,j})\kappa_1 - \int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1 = \langle \phi_j, \phi_i \rangle_{L^2(\Gamma)} \gamma_i \quad (4.67)$$

onde os coeficientes desconhecidos ( $\gamma_i$ ) podem ser obtidos pela solução do sistema dado pela Eq. (4.67) e, portanto, através da Eq. (4.66), o fluxo de calor na interface inacessível  $\Gamma$ , é obtido. Escrevendo a Eq. (4.67) na forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} \int_{\Gamma} (\phi_1 \phi_1) d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma} (\phi_1 \phi_N) d\Gamma \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Gamma} (\phi_N \phi_1) d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma} (\phi_N \phi_N) d\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re(G_{1,1})\kappa_1 - \int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ G_{1,1} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1 \\ \vdots \\ \Re(G_{1,N})\kappa_1 - \int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ G_{1,N} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1 \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

Note que a diferença entre os sistemas dados pelas Eqs. (4.36) e (4.60) é o aparecimento de integrais nos domínios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  do Laplaciano de  $T_1$  e de  $T_2$ , respectivamente, no vetor de grandezas conhecidas. A mesma diferença pode ser observada entre os sistemas Eqs. (4.44) e (4.68). Isto faz com que seja necessário encontrar o campo de temperatura em cada passo no tempo.

Considera-se o mesmo procedimento apresentado em COLAÇO *et al.* [23]:

$$\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1^{n+1}}{\partial t} = \nabla^2 T_1^n \quad \text{em} \quad \Omega_1 \quad (4.69)$$

$$\frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2^{n+1}}{\partial t} = \nabla^2 T_2^n \quad \text{em} \quad \Omega_2 \quad (4.70)$$

onde  $n$  indica o passo no tempo. Com isso, os sistemas dados pelas Eqs. (4.60) e (4.68) podem ser reescritos como

$$\begin{pmatrix} \int_{\Gamma} (\beta_1 \beta_1) d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma} (\beta_1 \beta_N) d\Gamma \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Gamma} (\beta_N \beta_1) d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma} (\beta_N \beta_N) d\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1^n \\ \vdots \\ \zeta_N^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re(F_{1,1})\kappa_1 - \int_{\Omega_1} \kappa_1 [F_{1,1} (\nabla^2 T_1^n)] d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} \kappa_2 [F_{2,1} (\nabla^2 T_2^n)] d\Omega_2 \\ \vdots \\ \Re(F_{1,N})\kappa_1 - \int_{\Omega_1} \kappa_1 [F_{1,N} (\nabla^2 T_1^n)] d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} \kappa_2 [F_{2,N} (\nabla^2 T_2^n)] d\Omega_2 \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

$$\begin{pmatrix} \int_{\Gamma} (\phi_1 \phi_1) d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma} (\phi_1 \phi_N) d\Gamma \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Gamma} (\phi_N \phi_1) d\Gamma & \cdots & \int_{\Gamma} (\phi_N \phi_N) d\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1^n \\ \vdots \\ \gamma_N^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re(G_{1,1})\kappa_1 - \int_{\Omega_1} \kappa_1 [G_{1,1} (\nabla^2 T_1^n)] d\Omega_1 \\ \vdots \\ \Re(G_{1,N})\kappa_1 - \int_{\Omega_1} \kappa_1 [G_{1,N} (\nabla^2 T_1^n)] d\Omega_1 \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

Uma vez que as medidas de temperatura são tomadas de 1 em 1 segundo, enquanto o passo no tempo para a solução do problema direto utilizando diferenças finitas é de  $\Delta t = 10^{-3}$  segundos, é necessário um processo de marcha no tempo para a solução dos sistemas dados pelas Eqs. (4.71) e (4.72). Como nesta abordagem serão apresentados apenas casos de condutância térmica de contato que não variam com o tempo, espera-se que seja possível estimar a condutância térmica de contato em qualquer passo no tempo. Portanto, considera-se uma estimativa pseudo transiente [23] onde  $h$  é dado por:

$$h^{n+1} = \frac{-\left[\kappa_1 \frac{\partial T_1^n}{\partial \mathbf{n}_1}\right]_{\Gamma}}{[T_1^n - T_2^n]_{\Gamma}} = \frac{\sum_i \gamma_i^n \phi_i}{\sum_i \zeta_i^n \beta_i} \quad (4.73)$$

A Eq. (4.73) deve ser resolvida para vários passos no tempo a fim de alcançar uma boa estimativa. Para estabilizar a solução foi utilizado o mesmo procedimento encontrado em COLAÇO *et al.* [23], dado pela Eq. (4.74),

$$h_{new}^{n+1} = \omega h^{n+1} + \frac{(1 - \omega)}{n} \sum_{j=1}^n h^j \quad (4.74)$$

onde  $\omega$  foi tomado como 0.7.

### 4.3.2 Metodologia 2

Esta metodologia foi apresentada em TOUGRI *et al.* [25], onde a estimativa da condutância térmica de contato é unidimensional. Os autores utilizaram os problemas auxiliares como apresentados em ABREU *et al.* [22], isto é, os problemas auxiliares modificados mostrados na seção 4.2.2, os quais foram resolvidos através da Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT). Neste trabalho, as estimativas são bidimensionais e os problemas auxiliares são resolvidos numericamente.

Na metodologia 2, o objetivo é eliminar a necessidade da solução do problema direto e, com isso, diminuir o tempo computacional. Por este motivo, iniciaremos a formulação do ponto que em que essa metodologia difere da metodologia 1.

Para a estimativa do salto de temperatura, chega-se na Eq. (4.75) e, para a estimativa do fluxo de calor, chega-se na Eq. (4.76).

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \kappa_2 \left[ F_{2,j} \left( \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \right) \right] d\Omega_2 = \\ \int_{\Gamma_0} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 + \int_{\Gamma} \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} [T_2 - T_1] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1 = \int_{\Gamma_0} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 \\ + \int_{\Gamma} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.76)$$

Note que a ideia é eliminar as integrais  $\int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1$ ,  $\int_{\Omega_2} \kappa_2 \left[ F_{2,j} \left( \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t} \right) \right] d\Omega_2$  e  $\int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1$ , evitando assim, a necessidade da solução do problema direto na estimativa.

Usa-se novamente que [23]:

$$\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1^{n+1}}{\partial t} = \nabla^2 T_1^n \quad \text{em} \quad \Omega_1 \quad (4.77)$$

$$\frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2^{n+1}}{\partial t} = \nabla^2 T_2^n \quad \text{em} \quad \Omega_2 \quad (4.78)$$

Podemos reescrever as Eqs. (4.75) e (4.76) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \kappa_1 [F_{1,j} (\nabla^2 T_1^n)] d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \kappa_2 [F_{2,j} (\nabla^2 T_2^n)] d\Omega_2 = \\ & \int_{\Gamma_0} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y^{n+1} \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 + \int_{\Gamma} \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} [T_2^{n+1} - T_1^{n+1}] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \kappa_1 [G_{1,j} (\nabla^2 T_1^n)] d\Omega_1 &= \int_{\Gamma_0} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y^{n+1} \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 \\ &+ \int_{\Gamma} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1^{n+1}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.80)$$

Sabemos que as Eqs. (4.81) e (4.82) são as definições de Funcional de Reciprocidade no tempo  $n + 1$  para os problemas auxiliares 1 e 2, respectivamente.

$$\mathfrak{R}^{n+1}(F_{1,j}) = \int_{\Gamma_0} \left[ F_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y^{n+1} \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 \quad (4.81)$$

$$\mathfrak{R}^{n+1}(G_{1,j}) = \int_{\Gamma_0} \left[ G_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y^{n+1} \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 \quad (4.82)$$

Logo, teremos

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \kappa_1 [F_{1,j} (\nabla^2 T_1^n)] d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \kappa_2 [F_{2,j} (\nabla^2 T_2^n)] d\Omega_2 = \\ & \kappa_1 \mathfrak{R}^{n+1}(F_{1,j}) + \int_{\Gamma} \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} [T_2^{n+1} - T_1^{n+1}] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.83)$$

$$\int_{\Omega_1} \kappa_1 [G_{1,j} (\nabla^2 T_1^n)] d\Omega_1 = \kappa_1 \mathfrak{R}^{n+1}(G_{1,j}) + \int_{\Gamma} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1^{n+1}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma \quad (4.84)$$

Sabemos que

$$\int_{\Omega_1} [F_{1,j} (\nabla^2 T_1^n) - T_1^n (\nabla^2 F_{1,j})] d\Omega_1 = \int_{\partial\Omega_1} \left[ F_{1,j} \frac{\partial T_1^n}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1^n \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.85)$$

$$\int_{\Omega_2} [F_{2,j} (\nabla^2 T_2^n) - T_2^n (\nabla^2 F_{2,j})] d\Omega_2 = \int_{\partial\Omega_2} \left[ F_{2,j} \frac{\partial T_2^n}{\partial \mathbf{n}_2} - T_2^n \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} \right] d(\partial\Omega_2) \quad (4.86)$$

$$\int_{\Omega_1} [G_{1,j}(\nabla^2 T_1^n) - T_1^n(\nabla^2 G_{1,j})] d\Omega_1 = \int_{\partial\Omega_1} \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1^n}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1^n \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.87)$$

Sabemos dos problemas auxiliares 1 e 2 que  $\nabla^2 F_{1,j} = 0$  cf. Eq. (4.30a),  $\nabla^2 F_{2,j} = 0$  cf. Eq. (4.30e) e  $\nabla^2 G_{1,j} = 0$  cf. Eq. (4.38a). Logo,

$$\int_{\Omega_1} [F_{1,j}(\nabla^2 T_1^n)] d\Omega_1 = \int_{\partial\Omega_1} \left[ F_{1,j} \frac{\partial T_1^n}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1^n \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.88)$$

$$\int_{\Omega_2} [F_{2,j}(\nabla^2 T_2^n)] d\Omega_2 = \int_{\partial\Omega_2} \left[ F_{2,j} \frac{\partial T_2^n}{\partial \mathbf{n}_2} - T_2^n \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} \right] d(\partial\Omega_2) \quad (4.89)$$

$$\int_{\Omega_1} [G_{1,j}(\nabla^2 T_1^n)] d\Omega_1 = \int_{\partial\Omega_1} \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1^n}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1^n \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.90)$$

Substituindo as Eqs. (4.88) e (4.89) na Eq. (4.83) e, substituindo a Eq. (4.90) na Eq. (4.84), tem-se

$$\begin{aligned} \kappa_1 \int_{\partial\Omega_1} \left[ F_{1,j} \frac{\partial T_1^n}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1^n \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) + \kappa_2 \int_{\partial\Omega_2} \left[ F_{2,j} \frac{\partial T_2^n}{\partial \mathbf{n}_2} - T_2^n \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} \right] d(\partial\Omega_2) = \\ \kappa_1 \mathfrak{R}^{n+1}(F_{1,j}) + \int_{\Gamma} \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} [T_2^{n+1} - T_1^{n+1}] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.91)$$

$$\kappa_1 \int_{\partial\Omega_1} \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1^n}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1^n \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) = \kappa_1 \mathfrak{R}^{n+1}(G_{1,j}) + \int_{\Gamma} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1^{n+1}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma \quad (4.92)$$

Do problema direto em regime transiente sabemos que  $\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = 0$  em  $\Gamma_1$  cf. Eq. (3.3b),  $-\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = q$  em  $\Gamma_0$  cf. Eq. (3.3d),  $\frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} = 0$  em  $\Gamma_2$  cf. Eq. (3.3g),  $T_2 = 0$  em  $\Gamma_\infty$  cf. Eq. (3.3h) e  $\kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} = -\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1}$  em  $\Gamma$  cf. Eq. (3.3i). Do problema auxiliar 1 sabemos que  $\frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0$  em  $\Gamma_1$  cf. Eq. (4.30c),  $F_{1,j} = F_{2,j}$  em  $\Gamma$  cf. Eq. (4.30d),  $\frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} = 0$  em  $\Gamma_2$  cf. Eq. (4.30f),  $F_{2,j} = 0$  em  $\Gamma_\infty$  cf. Eq. (4.30g) e  $\kappa_2 \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} = -\kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1}$  em  $\Gamma$  cf. Eq. (4.30h).

Utilizando essas condições e o fato das medidas de temperatura  $Y$  serem avaliadas em  $\Gamma_0$ , a Eq. (4.91) pode ser reescrita como

$$\kappa_1 \Re^n(F_{1,j}) - \int_{\Gamma} \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} [T_1^n - T_2^n] d\Gamma = \kappa_1 \Re^{n+1}(F_{1,j}) - \int_{\Gamma} \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} [T_1^{n+1} - T_2^{n+1}] d\Gamma \quad (4.93)$$

ou

$$\kappa_1 \Re^{n+1}(F_{1,j}) - \kappa_1 \Re^n(F_{1,j}) = \int_{\Gamma} \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} [\Delta T^{n+1} - \Delta T^n] d\Gamma \quad (4.94)$$

onde

$$\Delta T^{n+1} = T_1^{n+1} - T_2^{n+1} \quad (4.95)$$

$$\Delta T^n = T_1^n - T_2^n \quad (4.96)$$

Do problema direto em regime transiente sabemos que  $\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = 0$  em  $\Gamma_1$  cf. Eq. (3.3b) e  $-\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = q$  em  $\Gamma_0$  cf. Eq. (3.3d). Do problema auxiliar 2 sabemos que  $\frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0$  em  $\Gamma_1$  cf. Eq. (4.38c) e  $\frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0$  em  $\Gamma$  cf. Eq. (4.38d). Utilizando essas condições, o fato das medidas de temperatura  $Y$  serem avaliadas em  $\Gamma_0$ , a Eq. (4.92) pode ser reescrita como:

$$\kappa_1 \Re^n(G_{1,j}) + \int_{\Gamma} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1^n}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma = \kappa_1 \Re^{n+1}(G_{1,j}) + \int_{\Gamma} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1^{n+1}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma \quad (4.97)$$

$$\kappa_1 \Re^{n+1}(G_{1,j}) - \kappa_1 \Re^n(G_{1,j}) = - \int_{\Gamma} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1^{n+1}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1^n}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma \quad (4.98)$$

Logo, temos das Eqs. (4.94) e (4.98) as seguintes equações, respectivamente,

$$\kappa_1 \Re^{n+1}(F_{1,j}) - \kappa_1 \Re^n(F_{1,j}) = \left\langle \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1}, [\Delta T^{n+1} - \Delta T^n] \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \quad (4.99)$$

$$\kappa_1 \Re^{n+1}(G_{1,j}) - \kappa_1 \Re^n(G_{1,j}) = - \left\langle G_{1,j}, \left[ \kappa_1 \frac{\partial T_1^{n+1}}{\partial \mathbf{n}_1} - \kappa_1 \frac{\partial T_1^n}{\partial \mathbf{n}_1} \right] \right\rangle_{L^2(\Gamma)} \quad (4.100)$$

Podemos escrever [25],

$$[\Delta T^{n+1} - \Delta T^n]_\Gamma = \sum_i \zeta_i^{n+1} \beta_i \quad (4.101)$$

$$\left[ \kappa_1 \frac{\partial T_1^{n+1}}{\partial \mathbf{n}_1} - \kappa_1 \frac{\partial T_1^n}{\partial \mathbf{n}_1} \right]_\Gamma = \sum_i \gamma_i^{n+1} \phi_i \quad (4.102)$$

Definindo [22],

$$\beta_j = \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \quad \text{em } \Gamma \quad (4.103)$$

e,

$$\phi_j = G_{1,j} \quad \text{em } \Gamma \quad (4.104)$$

logo, podemos escrever as Eqs. (4.99) e (4.100), como

$$\kappa_1 \Re^{n+1}(F_{1,j}) - \kappa_1 \Re^n(F_{1,j}) = \langle \beta_j, \beta_i \rangle_{L^2(\Gamma)} \zeta_i^{n+1} \quad (4.105)$$

$$\kappa_1 \Re^{n+1}(G_{1,j}) - \kappa_1 \Re^n(G_{1,j}) = \langle \phi_j, \phi_i \rangle_{L^2(\Gamma)} \gamma_i^{n+1} \quad (4.106)$$

Em forma de sistema, tem-se

$$\begin{pmatrix} \int_\Gamma (\beta_1 \beta_1) d\Gamma & \cdots & \int_\Gamma (\beta_1 \beta_N) d\Gamma \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_\Gamma (\beta_N \beta_1) d\Gamma & \cdots & \int_\Gamma (\beta_N \beta_N) d\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1^{n+1} \\ \vdots \\ \zeta_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 \Re^{n+1}(F_{1,1}) - \kappa_1 \Re^n(F_{1,1}) \\ \vdots \\ \kappa_1 \Re^{n+1}(F_{1,N}) - \kappa_1 \Re^n(F_{1,N}) \end{pmatrix} \quad (4.107)$$

$$\begin{pmatrix} \int_\Gamma (\phi_1 \phi_1) d\Gamma & \cdots & \int_\Gamma (\phi_1 \phi_N) d\Gamma \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_\Gamma (\phi_N \phi_1) d\Gamma & \cdots & \int_\Gamma (\phi_N \phi_N) d\Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1^{n+1} \\ \vdots \\ \gamma_N^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa_1 \Re^{n+1}(G_{1,1}) - \kappa_1 \Re^n(G_{1,1}) \\ \vdots \\ \kappa_1 \Re^{n+1}(G_{1,N}) - \kappa_1 \Re^n(G_{1,N}) \end{pmatrix} \quad (4.108)$$

Note que nos sistemas dados pelas Eqs. (4.71) e (4.72) aparecem integrais que necessitam da solução do problema direto. Já nos sistemas dados pelas Eqs. (4.107) e (4.108) não há a necessidade do problema direto, somente o cálculo do Funcional de Reciprocidade em dois tempos diferentes.

Nesse caso, estudam-se perfis de condutância térmica de contato que não variam

com o tempo. Assim, considera-se que  $\Delta T$  no regime permanente pode ser escrito como  $[\Delta T = \sum_n \Delta T^{n+1} - \Delta T^n]_\Gamma$  e o fluxo de calor na interface no regime permanente

pode ser escrito como  $-\left[\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1}\right]_\Gamma = \sum_n \left[\kappa_1 \frac{\partial T_1^{n+1}}{\partial \mathbf{n}_1} - \kappa_1 \frac{\partial T_1^n}{\partial \mathbf{n}_1}\right]$ , onde  $n$  tende ao infinito (ou é suficientemente grande para alcançar o regime permanente)[25].

Nesta metodologia não é necessário alcançar o estado estacionário para realizar a estimativa, basta um número finito de passos no tempo. Portanto, a condutância térmica de contato será calculada através da Eq. (4.109).

$$h = \sum_n \frac{\left[\kappa_1 \frac{\partial T_1^{n+1}}{\partial \mathbf{n}_1} - \kappa_1 \frac{\partial T_1^n}{\partial \mathbf{n}_1}\right]_\Gamma}{[\Delta T^{n+1} - \Delta T^n]_\Gamma} = \sum_n \frac{\sum_i \gamma_i^{n+1} \phi_i}{\sum_i \zeta_i^{n+1} \beta_i} \quad (4.109)$$



## 4.4 Abordagem 3

Nesta abordagem, consideram-se os problemas auxiliares em regime transiente e, com isso, é possível estimar perfis transientes de condutância térmica de contato sem a necessidade do problema direto na realização da estimativa.

### Problema Auxiliar 1 - Transiente

Considere o primeiro problema auxiliar para funções  $F_j$  para o domínio  $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$ , dado pelas Eqs. (4.110a) - (4.110j) [24].

$$\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial F_{1,j}}{\partial t} = -\nabla^2 F_{1,j} \quad \text{em } \Omega_1, \quad 0 < t < t_f \quad (4.110a)$$

$$F_{1,j} = \psi_j \quad \text{em } \Gamma_0, \quad 0 < t < t_f \quad (4.110b)$$

$$\frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1, \quad 0 < t < t_f \quad (4.110c)$$

$$F_{1,j} = F_{2,j} \quad \text{em } \Gamma, \quad 0 < t < t_f \quad (4.110d)$$

$$F_{1,j} = 0 \quad \text{em } \Omega_1, \quad t = t_f \quad (4.110e)$$

$$\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial F_{2,j}}{\partial t} = -\nabla^2 F_{2,j} \quad \text{em } \Omega_2, \quad 0 < t < t_f \quad (4.110f)$$

$$\frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} = 0 \quad \text{em } \Gamma_2, \quad 0 < t < t_f \quad (4.110g)$$

$$F_{2,j} = 0 \quad \text{em } \Gamma_\infty, \quad 0 < t < t_f \quad (4.110h)$$

$$\kappa_2 \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} = -\kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \quad \text{em } \Gamma, \quad 0 < t < t_f \quad (4.110i)$$

$$F_{2,j} = 0 \quad \text{em } \Omega_2, \quad t = t_f \quad (4.110j)$$

Note que  $F_{1,j} = 0$  e  $F_{2,j} = 0$  foram definidos em  $t = t_f$ , isto é, o problema auxiliar transiente é definido como um problema de valor final.

Considere a identidade (4.111) para o domínio  $\Omega_1$ ,

$$I_{\Omega_1} = \int_{\Omega_1} [F_{1,j}(\nabla^2 T_1) - T_1(\nabla^2 F_{1,j})] d\Omega_1 \quad (4.111)$$

Usando a segunda identidade de Green, tem-se

$$\int_{\Omega_1} [F_{1,j}(\nabla^2 T_1) - T_1(\nabla^2 F_{1,j})] d\Omega_1 = \int_{\partial\Omega_1} \left[ F_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.112)$$

Sabe-se que  $\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \nabla^2 T_1$  cf. Eq. (3.3a) e  $\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial F_{1,j}}{\partial t} = -\nabla^2 F_{1,j}$  cf. Eq. (4.110a). Logo, tem-se

$$\int_{\Omega_1} \left[ F_{1,j} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) + T_1 \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial F_{1,j}}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1 = \int_{\partial\Omega_1} \left[ F_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.113)$$

ou

$$\int_{\Omega_1} \left[ \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial t} (F_{1,j} T_1) \right] d\Omega_1 = \int_{\partial\Omega_1} \left[ F_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.114)$$

Repetindo o mesmo processo para o domínio  $\Omega_2$ , tem-se

$$\int_{\Omega_2} \left[ \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial t} (F_{2,j} T_2) \right] d\Omega_2 = \int_{\partial\Omega_2} \left[ F_{2,j} \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} - T_2 \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} \right] d(\partial\Omega_2) \quad (4.115)$$

Considerando  $\kappa_1$  e  $\kappa_2$  constantes e somando as Eqs. (4.114) e (4.115), tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial t} (F_{1,j} T_1) \right] d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \kappa_2 \left[ \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial t} (F_{2,j} T_2) \right] d\Omega_2 = \\ & \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) + \int_{\Gamma \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_\infty} \kappa_2 \left[ F_{2,j} \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} - T_2 \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} \right] d(\partial\Omega_2) \end{aligned} \quad (4.116)$$

Do problema direto em regime transiente sabemos que  $\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = 0$  em  $\Gamma_1$  cf. Eq. (3.3b),  $-\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = q$  em  $\Gamma_0$  cf. Eq. (3.3d),  $\frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} = 0$  em  $\Gamma_2$  cf. Eq. (3.3g),  $T_2 = 0$  em  $\Gamma_\infty$  cf. Eq. (3.3h),  $\kappa_2 \frac{\partial T_2}{\partial \mathbf{n}_2} = -\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1}$  em  $\Gamma$  cf. Eq. (3.3i) e que as medidas de temperatura ( $Y$ ) são tomadas em  $\Gamma_0$ .

Do problema auxiliar 1 transiente sabemos que  $\frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0$  em  $\Gamma_1$  cf. Eq. (4.110c),  $F_{1,j} = F_{2,j}$  em  $\Gamma$  cf. Eq. (4.110d),  $\frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} = 0$  em  $\Gamma_2$  cf. Eq. (4.110g),  $F_{2,j} = 0$  em  $\Gamma_\infty$  cf. Eq. (4.110h) e  $\kappa_2 \frac{\partial F_{2,j}}{\partial \mathbf{n}_2} = -\kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1}$  em  $\Gamma$  cf. Eq. (4.110i). Logo, a Eq. (4.116) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial t} (F_{1,j} T_1) \right] d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \kappa_2 \left[ \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial t} (F_{2,j} T_2) \right] d\Omega_2 = \\ & \int_{\Gamma_0} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 + \int_{\Gamma} \kappa_1 \left[ \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} (T_2 - T_1) \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.117)$$

Integrando no tempo e sabendo que  $T_1 = 0$  em  $t = 0$  cf. Eq. (3.3e),  $T_2 = 0$  em

$t = 0$  cf. Eq. (3.3j),  $F_{1,j} = 0$  em  $t = t_f$  cf. Eq. (4.110e) e  $F_{2,j} = 0$  em  $t = t_f$  cf. Eq. (4.110j), a Eq. (4.117) pode ser reescrita como:

$$\int_0^{t_f} \int_{\Gamma_0} \kappa_1 \left[ F_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 dt = \int_0^{t_f} \int_{\Gamma} \kappa_1 \left[ \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} (T_1 - T_2) \right] d\Gamma dt \quad (4.118)$$

Note que, para que as integrais  $\int_0^{t_f} \int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial t} (F_{1,j} T_1) \right] d\Omega_1 dt$  e  $\int_0^{t_f} \int_{\Omega_2} \kappa_2 \left[ \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial}{\partial t} (F_{2,j} T_2) \right] d\Omega_2 dt$  zerem, é necessário que  $F_{1,j} = 0$  em  $t = t_f$  e  $F_{2,j} = 0$  em  $t = t_f$ . Por este motivo, os problemas auxiliares foram elaborados com esta condição final. Com isso, as integrais com os campos de temperatura  $T_1$  e  $T_2$  desaparecem, eliminando a necessidade da solução do problema direto na estimativa.

Como o Funcional de Reciprocidade é dado pela Eq. (4.119)

$$\Re(F_{1,j}) = \int_{\Gamma_0} \left[ F_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 \quad (4.119)$$

podemos escrever a Eq. (4.118), como

$$\int_0^{t_f} \kappa_1 \Re(F_{1,j}) dt = \left\langle \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1}, T_1 - T_2 \right\rangle_{L^2(\Gamma \times (0, t_f))} \quad (4.120)$$

Definindo [22],

$$\beta_j = \kappa_1 \frac{\partial F_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \quad \text{em } \Gamma \quad (4.121)$$

pode-se escrever a Eq. (4.120) da seguinte forma,

$$\int_0^{t_f} \kappa_1 \Re(F_{1,j}) dt = \langle \beta_j, T_1 - T_2 \rangle_{L^2(\Gamma \times (0, t_f))} \quad (4.122)$$

Considerando que o salto de temperatura na interface pode ser escrito como [22]

$$[T_1 - T_2]_{\Gamma} = \sum_i \zeta_i \beta_i \quad (4.123)$$

e usando Eqs. (4.122) e (4.123), tem-se

$$\int_0^{t_f} \kappa_1 \Re(F_{1,j}) dt = \langle \beta_j, \beta_i \rangle_{L^2(\Gamma \times (0, t_f))} \zeta_i \quad (4.124)$$

onde os coeficientes  $(\zeta_i)$  podem ser obtidos a partir da solução do sistema dado pela

Eq. (4.124) e, portanto, através da Eq. (4.123), o salto de temperatura na interface  $([T_1 - T_2]_\Gamma)$  é obtido. Escrevendo a Eq. (4.124) na forma matricial, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \int_0^{t_f} \int_\Gamma (\beta_1 \beta_1) d\Gamma dt & \cdots & \int_0^{t_f} \int_\Gamma (\beta_1 \beta_N) d\Gamma dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^{t_f} \int_\Gamma (\beta_N \beta_1) d\Gamma dt & \cdots & \int_0^{t_f} \int_\Gamma (\beta_N \beta_N) d\Gamma dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^{t_f} \kappa_1 \Re(F_{1,1}) dt \\ \vdots \\ \int_0^{t_f} \kappa_1 \Re(F_{1,N}) dt \end{pmatrix} \quad (4.125)$$

## Problema Auxiliar 2 - Transiente

Considere outro problema auxiliar para funções  $G_{1,j}$  para o domínio  $\Omega_1$ , dado pelas Eqs. (4.126a) - (4.126e) [24].

$$\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial G_{1,j}}{\partial t} = -\nabla^2 G_{1,j} \quad \text{em } \Omega_1, \quad 0 < t < t_f \quad (4.126a)$$

$$G_{1,j} = \psi_j \quad \text{em } \Gamma_0, \quad 0 < t < t_f \quad (4.126b)$$

$$\frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1, \quad 0 < t < t_f \quad (4.126c)$$

$$\frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0 \quad \text{em } \Gamma, \quad 0 < t < t_f \quad (4.126d)$$

$$G_{1,j} = 0 \quad \text{em } \Omega_1, \quad t = t_f \quad (4.126e)$$

Considere a identidade (4.127) para o domínio  $\Omega_1$ ,

$$I_{\Omega_1} = \int_{\Omega_1} [G_{1,j}(\nabla^2 T_1) - T_1(\nabla^2 G_{1,j})] d\Omega_1 \quad (4.127)$$

Usando a segunda identidade de Green, tem-se

$$\int_{\Omega_1} [G_{1,j}(\nabla^2 T_1) - T_1(\nabla^2 G_{1,j})] d\Omega_1 = \int_{\partial\Omega_1} \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.128)$$

Sabe-se que  $\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \nabla^2 T_1$  cf. Eq. (3.3a) e  $\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial G_{1,j}}{\partial t} = -\nabla^2 G_{1,j}$  cf. Eq. (4.126a). Logo, tem-se

$$\int_{\Omega_1} \left[ G_{1,j} \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} \right) + T_1 \left( \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial G_{1,j}}{\partial t} \right) \right] d\Omega_1 = \int_{\partial\Omega_1} \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.129)$$

ou

$$\int_{\Omega_1} \left[ \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial t} (G_{1,j} T_1) \right] d\Omega_1 = \int_{\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma} \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} - T_1 \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d(\partial\Omega_1) \quad (4.130)$$

Do problema direto em regime transiente sabemos que  $\frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = 0$  em  $\Gamma_1$  cf. Eq. (3.3b),  $-\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = q$  em  $\Gamma_0$  cf. Eq. (3.3d) e que as medidas de temperatura ( $Y$ ) são tomadas em  $\Gamma_0$ .

Do problema auxiliar 2 sabemos que  $\frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0$  em  $\Gamma_1$  cf. Eq. (4.126c),  $\frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} = 0$  em  $\Gamma$  cf. Eq. (4.126d). Logo, a Eq. (4.130) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \kappa_1 \left[ \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial}{\partial t} (G_{1,j} T_1) \right] d\Omega_1 = \int_{\Gamma_0} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 + \\ \int_{\Gamma} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma \end{aligned} \quad (4.131)$$

Integrando no tempo e sabendo que  $T_1 = 0$  em  $t = 0$  cf. Eq. (3.3e),  $G_{1,j} = 0$  em  $t = t_f$  cf. Eq. (4.126e), a Eq. (4.131) pode ser reescrita como

$$\int_0^{t_f} \int_{\Gamma_0} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 dt = - \int_0^{t_f} \int_{\Gamma} \kappa_1 \left[ G_{1,j} \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma dt \quad (4.132)$$

Como o Funcional de Reciprocidade é dado pela Eq. (4.133),

$$\Re(G_{1,j}) = \int_{\Gamma_0} \left[ G_{1,j} \left( -\frac{q}{\kappa_1} \right) - Y \frac{\partial G_{1,j}}{\partial \mathbf{n}_1} \right] d\Gamma_0 \quad (4.133)$$

podemos escrever a Eq. (4.132), como

$$\int_0^{t_f} \kappa_1 \Re(G_{1,j}) dt = - \left\langle G_{1,j}, \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} \right\rangle_{L^2(\Gamma \times (0, t_f))} \quad (4.134)$$

Definindo [22],

$$\phi_j = G_{1,j} \quad \text{em } \Gamma \quad (4.135)$$

pode-se escrever a Eq. (4.134) da seguinte forma

$$\int_0^{t_f} \kappa_1 \Re(G_{1,j}) dt = - \left\langle \phi_j, \kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} \right\rangle_{L^2(\Gamma \times (0, t_f))} \quad (4.136)$$

Considerando que o fluxo de calor na interface inacessível  $\Gamma$  pode ser escrito

como [22],

$$-\left[\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1}\right]_{\Gamma} = \sum_i \gamma_i \phi_i \quad (4.137)$$

e usando as Eqs. (4.136) e (4.137), pode-se escrever

$$\int_0^{t_f} \kappa_1 \Re(G_{1,j}) dt = \langle \phi_j, \phi_i \rangle_{L^2(\Gamma \times (0, t_f))} \gamma_i \quad (4.138)$$

onde os coeficientes desconhecidos ( $\gamma_i$ ) podem ser obtidos pela solução do sistema dado pela Eq. (4.138) e, portanto, através da Eq. (4.137), o fluxo de calor, na interface inacessível  $\Gamma$ , é obtido. Escrevendo a Eq. (4.138) na forma matricial, tem-se

$$\begin{pmatrix} \int_0^{t_f} \int_{\Gamma} (\phi_1 \phi_1) d\Gamma dt & \cdots & \int_0^{t_f} \int_{\Gamma} (\phi_1 \phi_N) d\Gamma dt \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^{t_f} \int_{\Gamma} (\phi_N \phi_1) d\Gamma dt & \cdots & \int_0^{t_f} \int_{\Gamma} (\phi_N \phi_N) d\Gamma dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^{t_f} \kappa_1 \Re(G_{1,1}) dt \\ \vdots \\ \int_0^{t_f} \kappa_1 \Re(G_{1,N}) dt \end{pmatrix} \quad (4.139)$$

e, portanto, após a solução dos problema auxiliares transientes e dos sistemas dados pelas Eqs. (4.125) e (4.139), encontra-se a estimativa da condutância térmica de contato, dada pela Eq. (4.140).

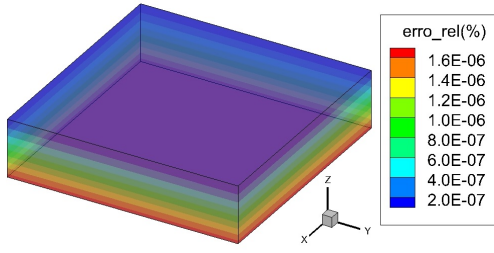
$$h = \frac{\sum_i \gamma_i \phi_i}{\sum_i \zeta_i \beta_i} \quad (4.140)$$

## Convergência dos Problemas Auxiliares

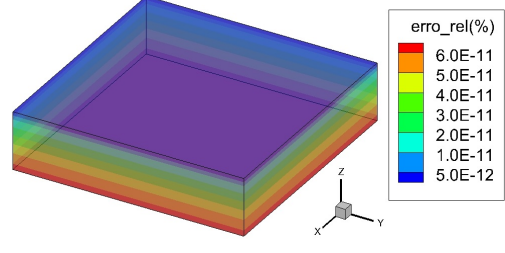
Os problemas auxiliares transientes foram resolvidos utilizando o método de diferenças finitas com formulação explícita e uma análise de convergência de malha foi realizada. Foram analisadas as malhas do problema auxiliar 1 com dois materiais iguais, como também a malha do problema auxiliar 2. Para avaliar a convergência, considerou-se 1 função em cada direção na definição da base ortonormal, isto é,  $\psi_1 = \psi_x^1 \times \psi_y^1 \times \psi_t^1$ .

As figuras 4.5 e 4.6 apresentam o erro relativo (%) entre as malhas com  $121 \times 121 \times 31$  pontos e com  $241 \times 241 \times 61$  pontos, de acordo a Eq. (4.46), para o caso com dois materiais iguais ( $\kappa_1 = \kappa_2 = 54 \text{W}/(m^\circ\text{C})$ ) em quatro tempos distintos:  $t = 25$ ,  $t = 100$ ,  $t = 300$  e  $t = 600$  segundos nos domínios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , respectivamente. Como pode ser observado, o erro relativo percentual é muito pequeno, mostrando a

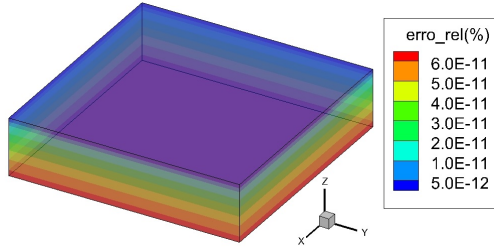
convergência da malha com  $121 \times 121 \times 31$  pontos.



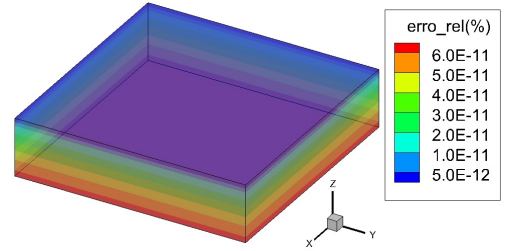
(a) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 1 no domínio  $\Omega_1$  no tempo  $t = 25$  segundos.



(b) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 1 no domínio  $\Omega_1$  no tempo  $t = 100$  segundos.

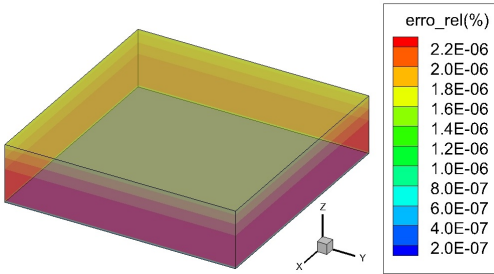


(c) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 1 no domínio  $\Omega_1$  no tempo  $t = 300$  segundos.

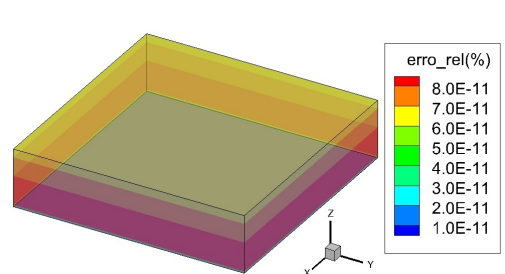


(d) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 1 no domínio  $\Omega_1$  no tempo  $t = 600$  segundos.

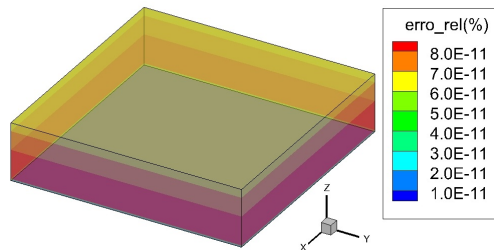
Figura 4.5: Erro Relativo (%) entre as malhas  $121 \times 121 \times 31$  e  $241 \times 241 \times 61$  -  $\kappa_1 = 54 \text{ W}/(m^\circ\text{C})$  e  $\kappa_2 = 54 \text{ W}/(m^\circ\text{C})$



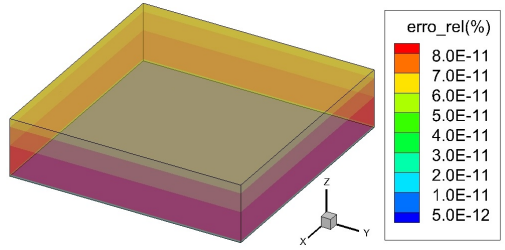
(a) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 1 no domínio  $\Omega_2$  no tempo  $t = 25$  segundos.



(b) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 1 no domínio  $\Omega_2$  no tempo  $t = 100$  segundos.



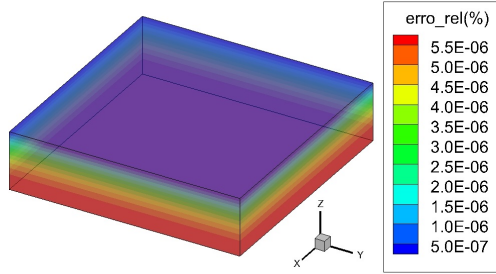
(c) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 1 no domínio  $\Omega_2$  no tempo  $t = 300$  segundos.



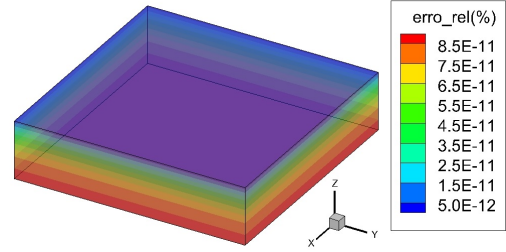
(d) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 1 no domínio  $\Omega_2$  no tempo  $t = 600$  segundos.

Figura 4.6: Erro Relativo (%) entre as malhas  $121 \times 121 \times 31$  e  $241 \times 241 \times 61$  -  $\kappa_1 = 54 \text{ W}/(m^\circ\text{C})$  e  $\kappa_2 = 54 \text{ W}/(m^\circ\text{C})$

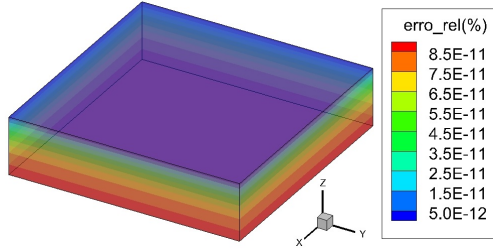
A figura 4.7 apresenta o erro relativo (%) entre as malhas  $121 \times 121 \times 31$  e  $241 \times 241 \times 61$  para o problema auxiliar 2 nos tempos  $t = 25$ ,  $t = 100$ ,  $t = 300$  e  $t = 600$  segundos, mostrando um erro muito baixo. Conclui-se que a malha com  $121 \times 121 \times 31$  pontos está convergida. Portanto, a malha com  $121 \times 121 \times 31$  pontos foi utilizada para a solução dos problemas auxiliares transientes 1 e 2.



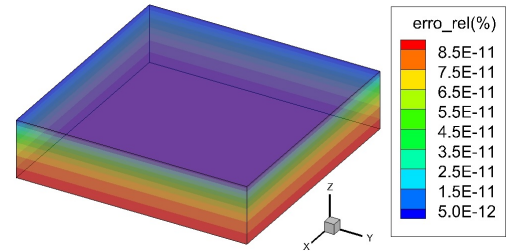
(a) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 2 no tempo  $t = 25$  segundos.



(b) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 2 no tempo  $t = 100$  segundos.



(c) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 2 no tempo  $t = 300$  segundos.



(d) Erro Relativo (%) para o problema auxiliar 2 no tempo  $t = 600$  segundos.

Figura 4.7: Erro Relativo (%) entre as malhas  $121 \times 121 \times 31$  e  $241 \times 241 \times 61$  -  $\kappa_1 = 54 \text{ W}/(m^\circ\text{C})$  e  $\kappa_2 = 54 \text{ W}/(m^\circ\text{C})$



## 4.5 Estimativa do fluxo de calor

Como dito anteriormente, em um caso real o fluxo de calor aplicado pode ser desconhecido, conhecendo-se apenas as medidas de temperatura decorrentes da aplicação de tal fluxo de calor. Por este motivo, será apresentado um caso numérico de estimativa transiente de fluxo de calor utilizando o Filtro de Kalman.

Como a utilização do Filtro de Kalman não é objetivo principal deste trabalho, nesta seção será apresentada uma breve revisão sobre o assunto. Explicações aprofundadas podem ser encontradas nos seguintes trabalhos: KAIPIO e SOMERSALO [1], CHEN [56], GREWAL e ANDREWS [57], SIMON [58].

O Filtro de Kalman pode ser obtido através de uma abordagem baseada em mínimos quadrados ou na estatística Bayesiana. Nesta revisão, será considerada a abordagem Bayesiana, onde deve-se considerar as informações conhecidas de antemão (priori), obtendo assim novos dados à medida que se realiza experimentos (posteriori).

A abordagem estatística se baseia nos seguintes princípios [1]:

1. Todas as variáveis da formulação são modeladas como variáveis aleatórias;
2. A aleatoriedade das variáveis depende da quantidade de informações que se tem de cada uma delas;
3. O grau de informação relativa a essas variáveis é escrito como distribuições de probabilidade;
4. A solução do problema inverso é a distribuição de probabilidade a posteriori.

Normalmente deseja-se estimar uma quantidade de interesse desconhecida ( $\mathbf{x}$ ), para a qual é possível possuir alguma informação a priori. Esta informação pode ser aprimorada, observando-se uma quantidade aleatória relacionada com ( $\mathbf{x}$ ), chamada de observação. O *Teorema de Bayes* [1] combina as informações obtidas a priori com as novas informações obtidas.

O *Teorema de Bayes* é apresentado na equação (4.141).

$$\pi(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = \frac{\pi(\mathbf{y}|\mathbf{x})\pi(\mathbf{x})}{\pi(\mathbf{y})} \quad (4.141)$$

onde:

1.  $\pi(\mathbf{x})$  é a *função densidade de probabilidade (f.d.p.) a priori*, que traz qualquer informação conhecida de antemão a respeito dos parâmetros a serem estimados;

2.  $\pi(\mathbf{y}|\mathbf{x})$  é a *f.d.p. de verossimilhança (likelihood)*, que representa a probabilidade das medidas experimentais  $\mathbf{y}$  dado o conjunto de parâmetros  $\mathbf{x}$ ;
3.  $\pi(\mathbf{y})$  é a *f.d.p. das medidas experimentais* e é considerada uma constante de normalização;
4.  $\pi(\mathbf{x}|\mathbf{y})$  é a *função densidade de probabilidade (f.d.p.) a posteriori*, que representa a probabilidade dos parâmetros  $\mathbf{x}$  dadas as medidas experimentais  $\mathbf{y}$ .

Como o fluxo de calor a ser estimado é transiente, o problema é reescrito na forma de um problema de estimativa de variáveis de estado, visando a obtenção de informações sobre as incógnitas, baseado em informação obtida através de um modelo de observação. A variação temporal das variáveis de estado, por sua vez, é descrita através de um modelo de evolução, formando assim o chamado modelo de evolução-observação. A densidade de probabilidade posteriori é obtida com filtros Bayesianos em duas etapas: previsão e atualização.

### Filtro de Kalman

Como dito anteriormente, o Filtro de Kalman [1] funciona em duas etapas: previsão e atualização. Para isso deve-se construir um modelo de evolução e observação.

### Modelo de Evolução

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{e}_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{v}_{k-1}) \quad (4.142)$$

onde

- $\mathbf{x}$  são as variáveis de estado a serem estimadas;
- $\mathbf{u}$  são as variáveis de entrada de controle;
- $\mathbf{v}$  são os ruídos associados às variáveis de estado;
- $k$  indica o instante de tempo  $t_k$ .

### Modelo de Observação

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k) \quad (4.143)$$

onde

- $\mathbf{y}$  são as medidas experimentais;

- $\mathbf{x}$  são as variáveis de estado a serem estimadas;
- $\mathbf{w}$  são os ruídos associados às medidas experimentais;
- $k$  indica o instante de tempo  $t_k$ .

O modelo é construído considerando as seguintes hipóteses [1]:

1. O processo  $\mathbf{x}_k$  é Markoviano, isto é,

$$\pi(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \pi(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k)$$

2. O processo  $\mathbf{y}_k$  é Markoviano com respeito à história de  $\mathbf{x}_k$ , isto é,

$$\pi(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \pi(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k)$$

3. O processo  $\mathbf{x}_k$  depende das observações passadas apenas através da sua própria história, isto é,

$$\pi(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k) = \pi(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k)$$

Neste trabalho tem-se um problema de filtragem onde, assumindo o conhecimento de uma priori, deseja-se determinar a f.d.p a posteriori  $\pi(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_{1:k})$ , onde  $\mathbf{y}_{1:k} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\}$ . Através das etapas previsão e atualização, como pode-se ver na figura (4.8).

Para a utilização do Filtro de Kalman deve-se considerar que:

1. Os modelos de evolução e de observação são lineares;
2. Os ruídos em tais modelos são aditivos e gaussianos, com média zero e matrizes de covariância conhecidas.

Logo, tem-se que [1]

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{E}_k \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{J}_k \mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{s}_{k-1} + \mathbf{v}_{k-1} \quad (4.144)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (4.145)$$

onde

- As matrizes  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  são conhecidas pelas evoluções lineares do estado  $\mathbf{x}$  e da observação  $\mathbf{y}$ , respectivamente;
- A matriz  $\mathbf{J}$  determina como o controle  $\mathbf{u}$  afeta o estado  $\mathbf{x}$ ;

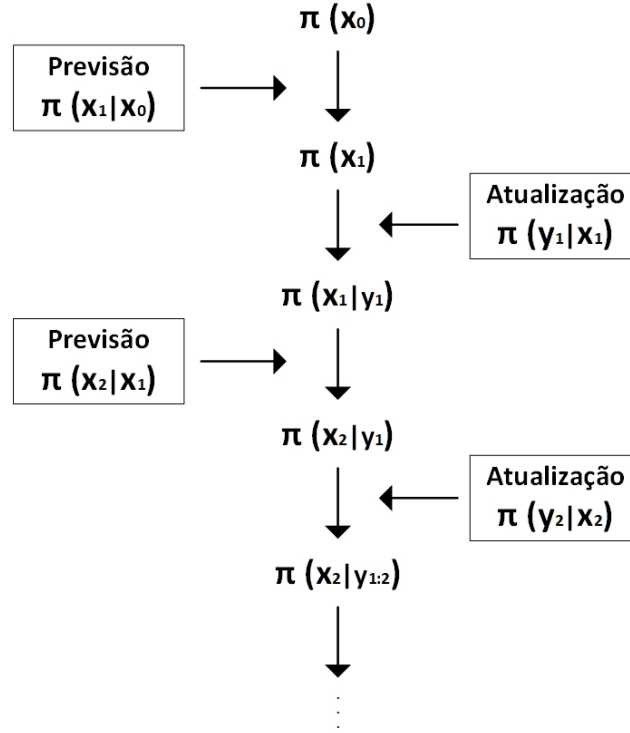


Figura 4.8: Esquema de previsão e atualização. Adaptado de KAIPPIO e SOMER-SALO [1].

- O vetor  $\mathbf{s}$  é considerado uma entrada conhecida (alguma informação do problema físico que não esteja contemplada no modelo de evolução);
- Os ruídos  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  têm médias e matrizes de covariância  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{W}$  conhecidas, respectivamente.

Este trabalho não possui entradas de controle e todas as informações necessárias estarão no modelo de evolução. Por este motivo,  $\mathbf{J}_k$ ,  $\mathbf{u}_{k-1}$  e  $\mathbf{s}_{k-1}$  são nulos.

Portanto, as etapas de previsão e atualização, podem ser escritas da seguinte forma [1]:

#### Previsão

$$\mathbf{x}_k^- = \mathbf{E}_k \mathbf{x}_{k-1}^+ + \mathbf{v}_{k-1} \quad (4.146)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{E}_k \mathbf{P}_{k-1}^+ \mathbf{E}_k^T + \mathbf{Q}_k \quad (4.147)$$

#### Atualização

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{W}_k)^{-1} \quad (4.148)$$

$$\mathbf{x}_k^+ = \mathbf{x}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k^-) \quad (4.149)$$

$$\mathbf{P}_k^+ = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^- \quad (4.150)$$

Nestas equações,  $\mathbf{x}^+$  e  $\mathbf{x}^-$  são as estimativas, a posteriori e a priori, do vetor de estados,  $\mathbf{P}^+$  e  $\mathbf{P}^-$  são as matrizes de covariância, a posteriori e a priori, do erro da estimativa do vetor de estados,  $\mathbf{K}$  é a matriz do ganho de Kalman e  $\mathbf{I}$  é uma matriz identidade. Estas equações são obtidas analiticamente e produzem um estimador não-viciado e com variância mínima, sendo portanto conhecido como o estimador ótimo para casos lineares e Gaussianos [58].

## 4.6 Código Computacional

O código computacional foi escrito na linguagem FORTRAN 90. Algumas subrotinas do IMSL[59], assim como do Numerical Recipes[29], foram utilizadas como será relatado a seguir.

Para a solução de todas as integrais duplas e triplas no presente trabalho, foram utilizadas as subrotinas *DBS2IG* e *DBS3IG* do IMSL. Estas subrotinas calculam as integrais duplas e triplas, respectivamente, dada a sua representação em B-spline. A representação B-spline é gerada através das subrotinas *DBS2IN* e *DBS3IN*, para os casos bidimensional e tridimensional, respectivamente.

Para a solução dos sistemas lineares sem considerar ruído nas medidas, foi utilizada a subrotina *DLSARG* do IMSL. Esta subrotina resolve um sistema de equações lineares através de duas subrotinas. Primeiramente, é realizada a fatoração LU da matriz de entrada e a estimativa do número de condição da matriz com a subrotina *DLFCRG*. Após a fatoração, através da subrotina *DLFIRG*, a solução do sistema é encontrada através de um refinamento iterativo [59].

Este método pode falhar se a matriz de entrada for singular ou muito próximo disto. Logo, a solução encontrada pode não condizer com a solução real do sistema. Por este motivo, ao acrescentar ruídos nos dados de entrada, o caráter mal condicionado do problema faz com que os ruídos sejam amplificados ao se resolver o sistema linear. Uma das possíveis razões para este mal condicionamento é o caráter mal-posto do problema inverso. Portanto, neste caso, optou-se pelo método TSVD (*truncated singular value decomposition*)[28–31] para a solução do sistema de equações lineares.

O método TSVD é conhecido por resolver sistemas mal condicionados. O parâmetro de truncamento necessário neste método funciona como uma regularização. O desafio é encontrar o melhor parâmetro de truncamento, encontrando com isso a solução do sistema.

Considerando uma matriz quadrada  $A_{n \times n}$ , a sua decomposição em valores singulares é dada da seguinte forma:

$$A = UDV^T \quad (4.151)$$

onde  $U, V$  são matrizes ortogonais  $n \times n$  e  $D$  é uma matriz diagonal com os valores singulares ( $\eta$ ) de  $A$ , que são definidos como a raiz quadrada dos autovalores de  $A^T A$ . Os valores singulares são não-negativos e ordenados de forma decrescente. Logo, um sistema  $Ax = b$  pode ser escrito como,

$$(UDV^T)x = b \quad (4.152)$$

E, portanto, a solução deste sistema será,

$$x = A^{-1}b = VD^{-1}U^Tb \quad (4.153)$$

que é equivalente a,

$$x = \sum_{i=1}^n v_i \frac{u_i^T b}{\eta_i} \quad (4.154)$$

Pode-se observar pela Eq. (4.154) que valores muito pequenos de  $\eta$  irão gerar valores muito grandes de  $\frac{1}{\eta}$ , causando uma instabilidade na solução. Por este motivo, utiliza-se um valor de truncamento ( $\varepsilon_{svd}$ ), onde o somatório apresentado na Eq. (4.154) será truncado para valores singulares  $\eta$  menores que  $\varepsilon_{svd}$ , logo,

$$x = \sum_{i=1}^m v_i \frac{u_i^T b}{\eta_i} \quad (4.155)$$

onde  $m < n$  e os valores  $\eta_{m+1}, \eta_{m+2}, \dots, \eta_n$  são menores do que o valor de truncamento especificado  $\varepsilon_{svd}$  e, por este motivo, são descartados.

Deve-se ressaltar que o parâmetro  $\varepsilon_{svd}$  é muito importante para obtenção de uma solução numérica com significado físico. Em um sistema mal condicionado, caso este parâmetro não seja bem determinado, o método TSVD apresentará soluções parecidas com as obtidas por um método direto, porém a solução encontrada não representará a solução real do sistema.

Não foi encontrado na literatura procedimentos determinísticos (analíticos) para a obtenção deste parâmetro, somente processos baseados no comportamento dos valores singulares ou no posto matricial. Como não há um método determinístico para a seleção deste parâmetro, foi utilizado um procedimento de escolha do parâmetro de truncamento ideal, que será detalhado adiante na seção de resultados.

# Capítulo 5

## Resultados

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos com as quatro metodologias apresentadas anteriormente.

### 5.1 Abordagem 1

Na primeira abordagem foi estudado um problema de transferência de calor tridimensional em regime permanente, com perfil de condutância térmica de contato bidimensional sem variação no tempo. A formulação do problema físico foi apresentada no capítulo 3.

Foi considerado tanto o contato entre dois materiais iguais como entre dois materiais diferentes. A escolha dos materiais está apresentada na tabela 5.1. Os perfis de condutância térmica de contato utilizados foram apresentados na tabela 3.1 e na figura 3.3, que são reproduzidas abaixo, por questão de conveniência (ver tabela 5.2 e figura 5.1).

Tabela 5.1: Configuração dos materiais

<b>Configuração 1</b>	$\kappa_1 = \kappa_2 = 54\text{W}/(m^\circ\text{C})$ - Aço (AISI 1050)
<b>Configuração 2</b>	$\kappa_1 = 14\text{W}/(m^\circ\text{C})$ - Inconel e $\kappa_2 = 54\text{W}/(m^\circ\text{C})$ - Aço (AISI 1050)
<b>Configuração 3</b>	$\kappa_1 = 54\text{W}/(m^\circ\text{C})$ - Aço (AISI 1050) e $\kappa_2 = 14\text{W}/(m^\circ\text{C})$ - Inconel

A figura 5.1 apresenta os perfis exatos da condutância térmica de contato. O perfil 1 é o caso mais simples (ver figura 5.1a), composto de um perfil de condutância térmica de contato constante, onde espera-se que o método possa recuperá-lo com



Tabela 5.2: Perfis de condutância térmica de contato.

	<b>Perfil - h</b> W/(m <sup>2</sup> °C)
1	$h_1 = 10^3$
2	$h_2 = 10^3$ para $(x < \frac{a}{3})$ e $(x > \frac{2a}{3})$ , $(y < \frac{b}{3})$ e $(y > \frac{2b}{3})$ $h_2 = 0$ para $(\frac{a}{3} \leq x \leq \frac{2a}{3})$ e $(\frac{b}{3} \leq y \leq \frac{2b}{3})$
3	$h_3 = 10^3$ para $(x < \frac{a}{5})$ e $(x > \frac{4a}{5})$ , $(y < \frac{b}{5})$ e $(y > \frac{4b}{5})$ $h_3 = 10^3$ para $(x < \frac{3a}{5})$ e $(x > \frac{2a}{5})$ , $(y < \frac{3b}{5})$ e $(y > \frac{2b}{5})$ $h_3 = 0$ para $(\frac{a}{5} \leq x \leq \frac{2a}{5})$ , $(\frac{b}{5} \leq y \leq \frac{2b}{5})$ $h_3 = 0$ para $(\frac{3a}{5} \leq x \leq \frac{4a}{5})$ , $(\frac{3b}{5} \leq y \leq \frac{4b}{5})$
4	$h_4 = 10^3 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$

precisão. Os perfis 2 e 3 apresentam maior dificuldade porque a condutância térmica de contato possui descontinuidades (ver figura 5.1b e 5.1c).

Por fim, o perfil 4 é um perfil suave de condutância térmica de contato (ver figura 5.1d), onde espera-se que a metodologia empregada seja capaz de produzir estimativas em boa concordância com os valores exatos.

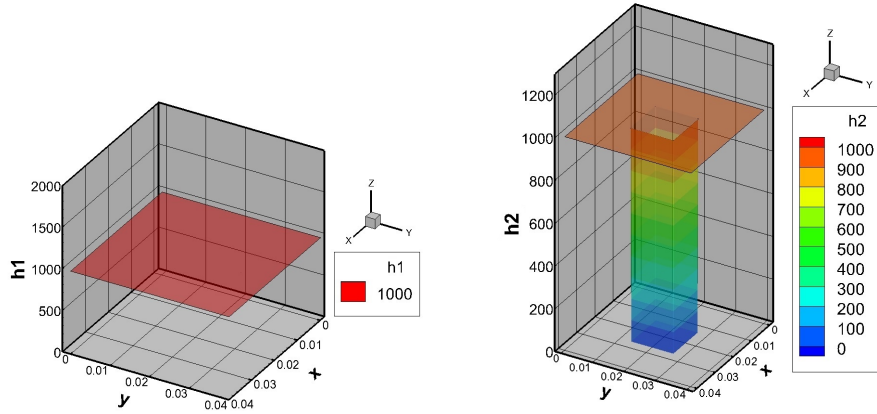
Na tabela 5.3 são apresentadas as temperaturas máximas medidas em  $\Gamma_0$  para cada perfil em cada configuração estudada, sem ruído nas medidas.

Tabela 5.3: Temperatura máxima em  $\Gamma_0$ .

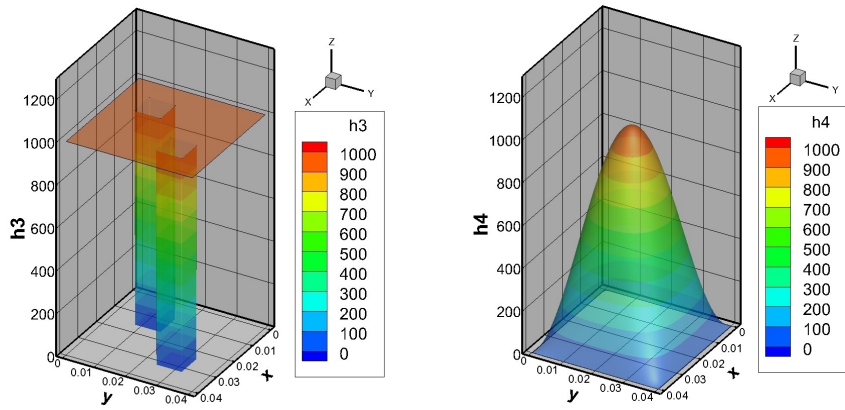
	<b>Temperatura máxima</b>		
<b>Perfil</b>	Configuração 1	Configuração 2	Configuração 3
1	137°C	189.9°C	189.9°C
2	154.7°C	217.8°C	209.9°C
3	148.1°C	204.6°C	202.1°C
4	150.2°C	191.3°C	182.6°C

Em todos os testes numéricos considerou-se um bloco retangular com largura  $a = 0.04\text{m}$ , comprimento  $b = 0.04\text{m}$  e altura  $c = 0.01\text{m}$  para cada domínio. O fluxo de calor imposto na superfície  $\Gamma_0$  tem o valor  $q = -10^5\text{W/m}^2$ , com exceção dos testes com perfil 4, onde o fluxo utilizado é  $q = -5 \times 10^4\text{W/m}^2$ . O fluxo de calor foi reduzido no perfil 4 para que a temperatura na superfície superior ficasse próxima da temperatura dos outros perfis (ver tabela 5.3).

A tabela 5.4 mostra todos os casos estudados, onde a coluna “configuração dos materiais” indica quais materiais foram utilizados em cada domínio (de acordo com a tabela 5.1), a coluna “perfil de h” indica o perfil da condutância térmica de contato



(a) Condutância Térmica de Contato - Perfil 1 (b) Condutância Térmica de Contato - Perfil 2



(c) Condutância Térmica de Contato - Perfil 3 (d) Condutância Térmica de Contato - Perfil 4

Figura 5.1: Perfis de condutância térmica de contato.

utilizado para gerar as medidas de temperatura (de acordo com a tabela 5.2). Por fim, a coluna “ruído nas medidas” indica se há ruído adicionado nas medidas de temperatura ( $\sigma = 0^\circ\text{C}$  significa que não há ruído adicionado). A determinação do ruído será abordada mais adiante.

Neste trabalho consideram-se 3 configurações diferentes, onde cada configuração possui 4 perfis. Cada perfil inclui casos sem e com 2 ruídos distintos. Assim, serão analisados 36 casos, apresentados na tabela 5.4. A figura 5.2 mostra um esquema de como foram determinados os casos.

Tabela 5.4: Casos Estudados

Casos Estudados			
	Configuração dos materiais	Perfil de h	Ruído nas medidas
Caso 1	1	1	$\sigma = 0^{\circ}\text{C}$
Caso 2	2	1	$\sigma = 0^{\circ}\text{C}$
Caso 3	3	1	$\sigma = 0^{\circ}\text{C}$
Caso 4	1	2	$\sigma = 0^{\circ}\text{C}$
Caso 5	2	2	$\sigma = 0^{\circ}\text{C}$
Caso 6	3	2	$\sigma = 0^{\circ}\text{C}$
Caso 7	1	3	$\sigma = 0^{\circ}\text{C}$
Caso 8	2	3	$\sigma = 0^{\circ}\text{C}$
Caso 9	3	3	$\sigma = 0^{\circ}\text{C}$
Caso 10	1	4	$\sigma = 0^{\circ}\text{C}$
Caso 11	2	4	$\sigma = 0^{\circ}\text{C}$
Caso 12	3	4	$\sigma = 0^{\circ}\text{C}$
Caso 13	1	1	$\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$
Caso 14	2	1	$\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$
Caso 15	3	1	$\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$
Caso 16	1	2	$\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$
Caso 17	2	2	$\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$
Caso 18	3	2	$\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$
Caso 19	1	3	$\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$
Caso 20	2	3	$\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$
Caso 21	3	3	$\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$
Caso 22	1	4	$\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$
Caso 23	2	4	$\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$
Caso 24	3	4	$\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$
Caso 25	1	1	$\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$
Caso 26	2	1	$\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$
Caso 27	3	1	$\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$
Caso 28	1	2	$\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$
Caso 29	2	2	$\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$
Caso 30	3	2	$\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$
Caso 31	1	3	$\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$
Caso 32	2	3	$\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$
Caso 33	3	3	$\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$
Caso 34	1	4	$\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$
Caso 35	2	4	$\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$
Caso 36	3	4	$\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$

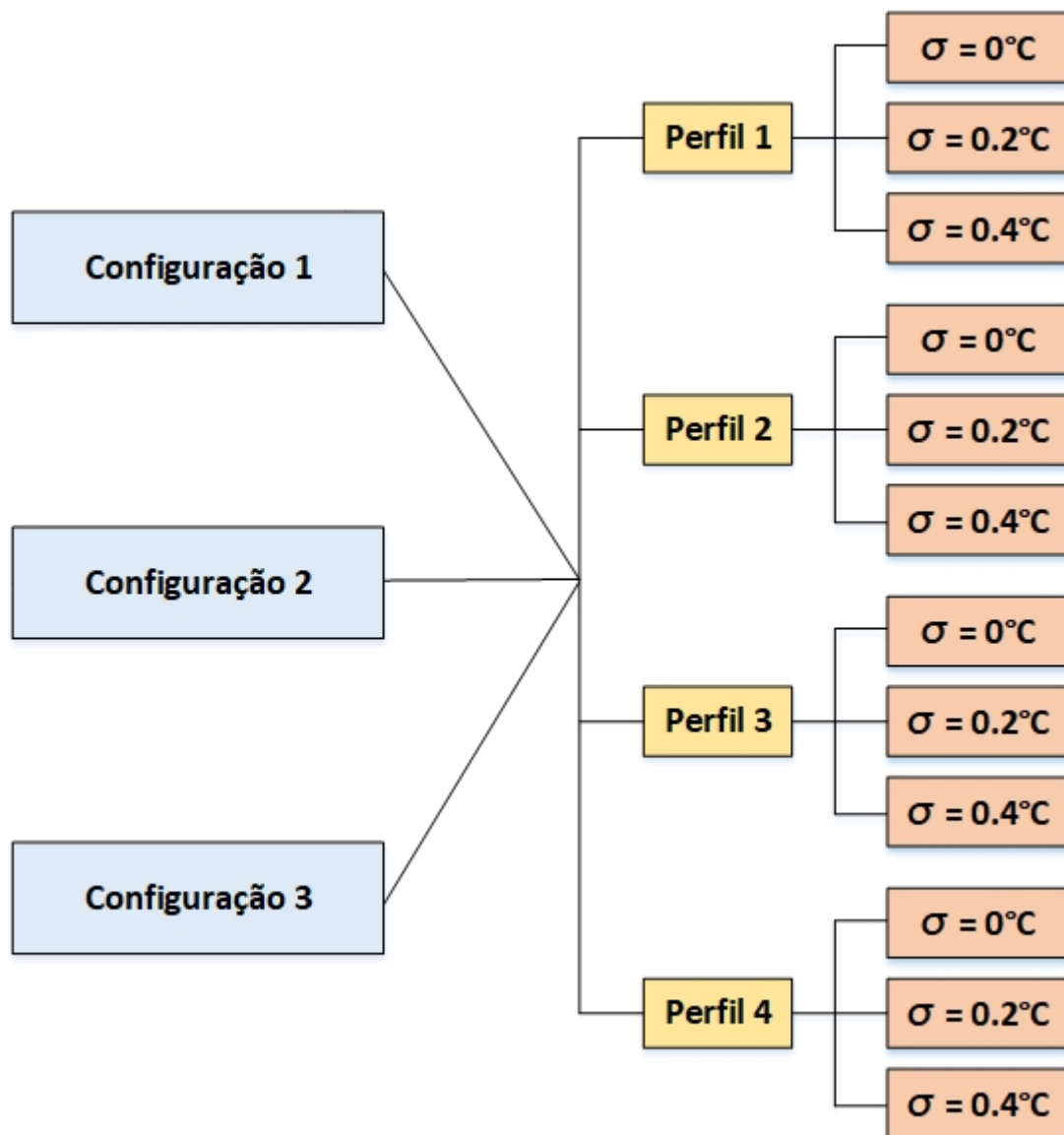


Figura 5.2: Casos Estudados.

Como dito na seção 4.1, a função  $\psi_j = \psi_x^i \times \psi_y^k$  é uma base de funções ortonormais  $L^2(\Gamma)$ , onde o subíndice “j” indica o número total de funções utilizadas, isto é, a multiplicação de funções na direção  $x$  pelo número de funções na direção  $y$ . Neste trabalho foi utilizada a base ortonormal de Fourier. Para realizar a estimativa é necessário definir o número de funções ortonormais que serão utilizadas em cada direção ( $x$  e  $y$ ). Logo, deseja-se encontrar o número de funções ideal para uma boa estimativa. Por esta razão, o número de funções na direção  $x$  e  $y$  foi variado de 1 a 30 e então calculou-se, para cada uma das combinações, os erros entre as condutâncias térmica exatas e estimadas, usando a Eq. (5.1). Para os casos onde  $\mathbf{h}_{\text{exato}} = \mathbf{0}$ , foi utilizado o erro absoluto, isto é,  $\varepsilon_h = \|\mathbf{h}_{\text{exato}} - \mathbf{h}_{\text{estimado}}\|_2$

Esta análise foi realizada para todos os perfis de condutância térmica de contato em todas as configurações estudadas sem ruído nas medidas, isto é, para os casos 1 a 12 da tabela 5.4. A seguir serão apresentadas as figuras com estas análises, onde o eixo horizontal representa o número de funções em cada direção. Por exemplo, onde aparece um número de funções igual a 15, significa que foram utilizadas 15 funções na direção  $x$  e 15 funções na direção  $y$ , isto é,  $\psi_{225} = \psi_x^{15} \times \psi_y^{15}$ .

$$\varepsilon_h = \frac{\|\mathbf{h}_{\text{exato}} - \mathbf{h}_{\text{estimado}}\|_2}{\|\mathbf{h}_{\text{exato}}\|_2} \quad (5.1)$$

Deve-se ressaltar que pode ser utilizado um número diferente de funções em cada direção como, por exemplo,  $\psi_{150} = \psi_x^{15} \times \psi_y^{10}$ . Entretanto, com intuito de simplificar a análise, optou-se por um número de funções iguais em cada direção.

Assim como o número de funções na direção  $x$  não precisa ser o mesmo na direção  $y$ , o número de funções utilizados para a estimativa do salto de temperatura não precisa ser o mesmo do número de funções utilizados para a estimativa do fluxo de calor. Porém, a análise também foi feita com o mesmo número de funções, a fim de simplificar sua escolha. Por este motivo, a análise e escolha do número de funções se deu pelos gráficos do erro da condutância térmica de contato, que é a estimativa de interesse deste trabalho.

A figura 5.3 mostra o erro entre a condutância térmica de contato exata e estimada no caso 1. Observa-se que, com o aumento do número de funções, o erro aumenta e que, com apenas 1 função em cada direção, obtêm-se os menores erros. Este resultado é esperado, porque como no perfil 1 a condutância térmica de contato é constante, espera-se que apenas com os termos constantes da série de Fourier seja possível realizar a estimativa.

As figuras 5.4 e 5.5 mostram o erro entre a condutância térmica de contato exata e estimada nos casos 2 e 3, respectivamente. Pode-se observar que os erros do perfil 1, em todos os casos, são bem parecidos sendo que os menores erros aparecem com

até 11 funções em cada direção,  $\psi_{121} = \psi_x^{11} \times \psi_y^{11}$ , para a estimativa da condutância térmica de contato nos casos 1 e 2, e com até 9 funções em cada direção,  $\psi_{81} = \psi_x^9 \times \psi_y^9$ , no caso 3.

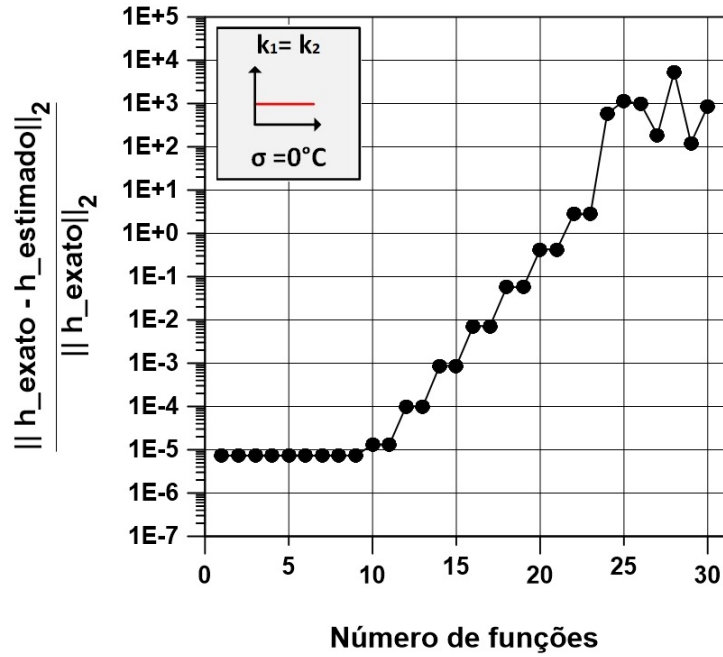


Figura 5.3: Erro relativo - Caso 1.

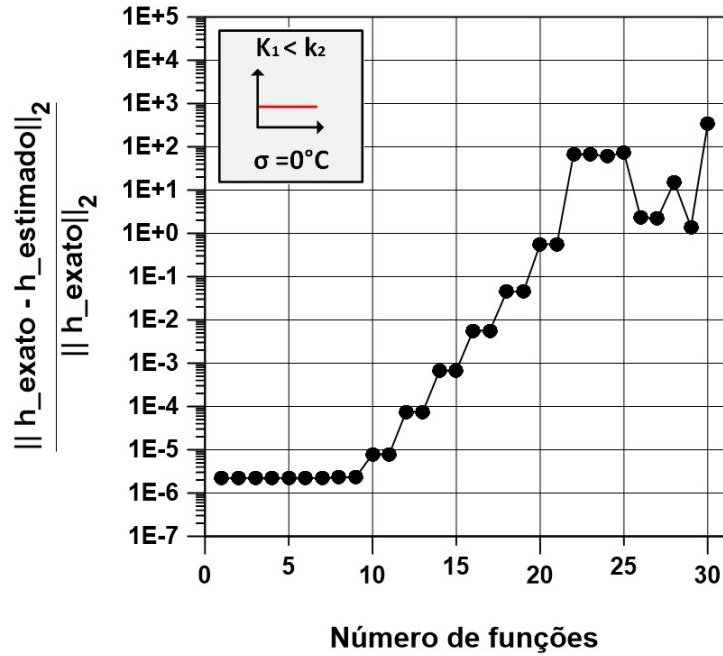


Figura 5.4: Erro relativo - Caso 2.

A figura 5.6 mostra o erro entre a condutância térmica de contato exata e estimada no caso 4. Observando a figura é possível ver que os erros diminuem quando mais funções são usadas, até um certo limite. A partir deste limite, se mais funções

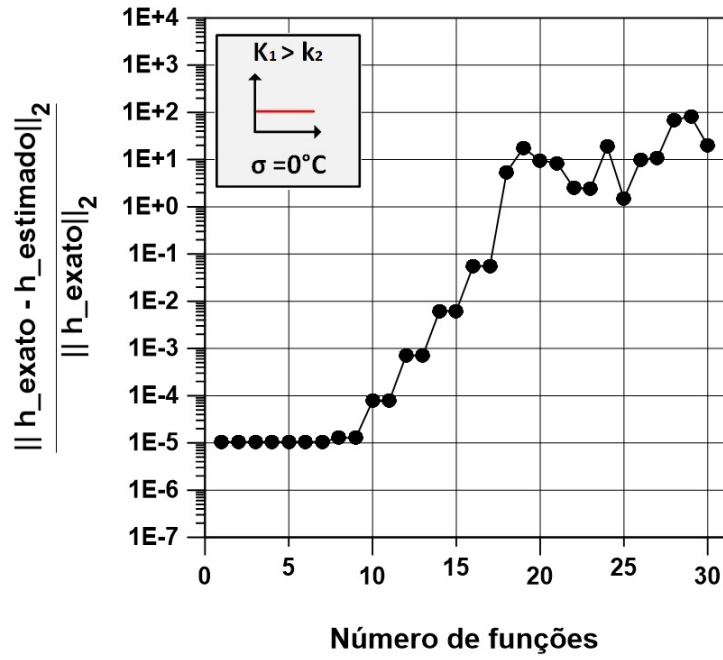


Figura 5.5: Erro relativo - Caso 3.

são usadas, os erros aumentam rapidamente devido ao caráter mal condicionado deste problema inverso. Pode-se observar que, utilizando um número de funções entre 10 e 19, é possível obter estimativas com menores erros.

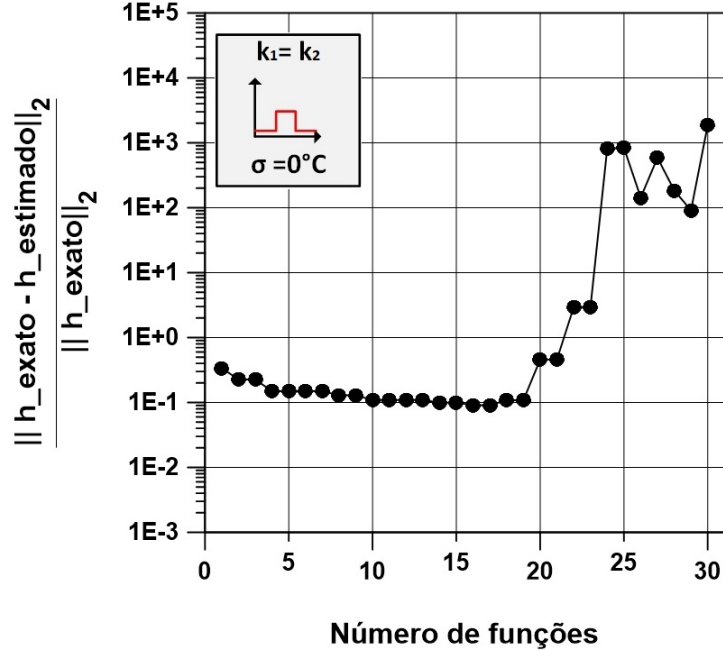


Figura 5.6: Erro relativo - Caso 4.

As figuras 5.7 e 5.8 mostram o erro entre a condutância térmica de contato exata e estimada nos casos 5 e 6, respectivamente. Pode-se observar que os erros do perfil 2 são menores na região entre 10 e 19 funções em cada direção para a estimativa da condutância térmica de contato no caso 5 e na região entre 10 e 17 funções no

caso 6. Com isso, podemos concluir que, para este perfil, independente do material utilizado, é possível obter uma boa estimativa para a condutância térmica de contato com 10 e 17 funções em cada direção.

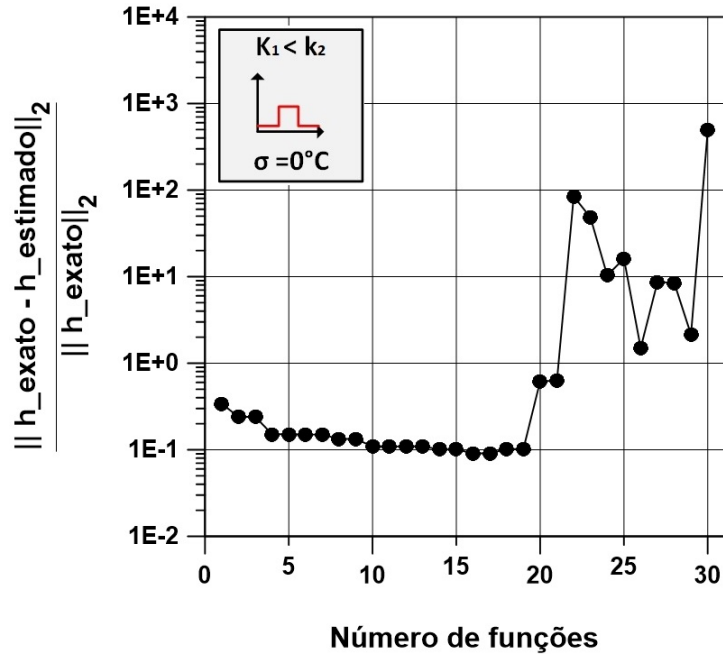


Figura 5.7: Erro relativo - Caso 5.

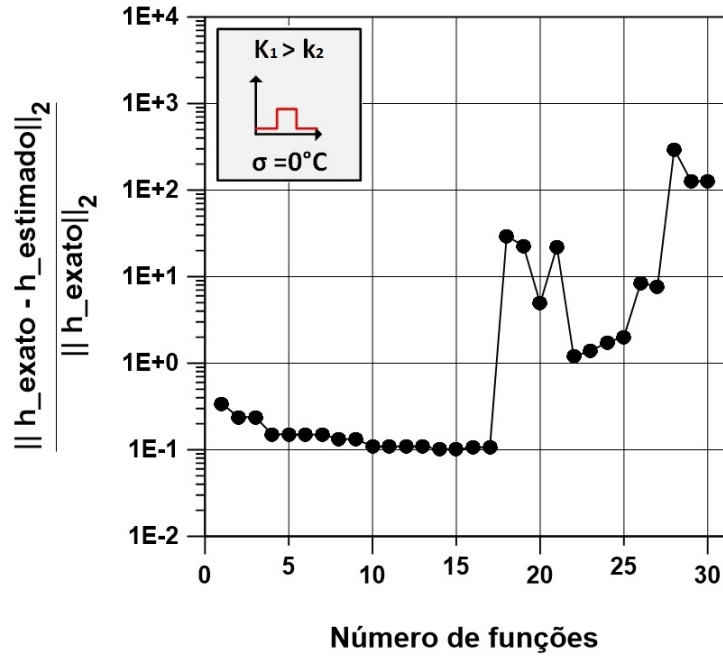


Figura 5.8: Erro relativo - Caso 6.

A figura 5.9 apresenta o erro entre a condutância térmica de contato exata e estimada no caso 7, onde utiliza-se o perfil 3. O comportamento é bem parecido com o apresentado na figura 5.6. Pode-se observar que, usando entre 9 e 19 funções,



é possível obter uma estimativa da condutância térmica de contato com os menores erros.

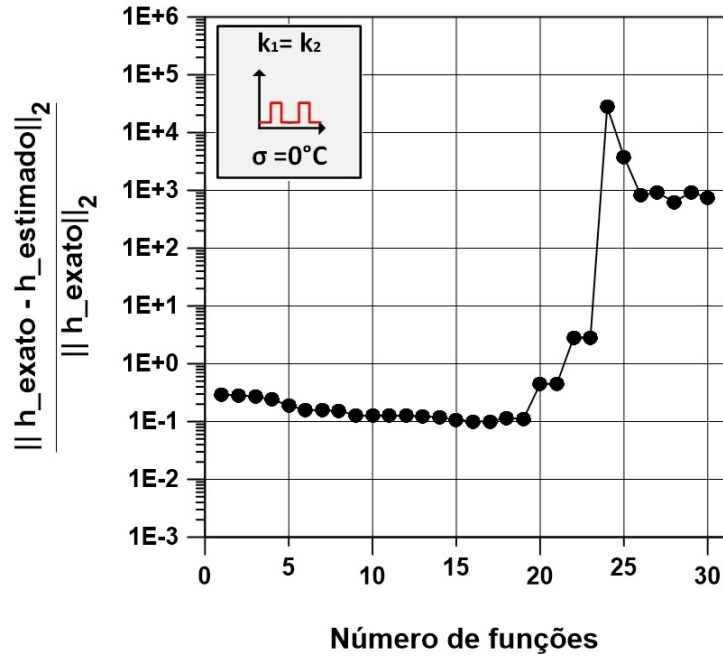


Figura 5.9: Erro relativo - Caso 7.

Ainda analisando o perfil 3, é possível observar que os erros são menores na região entre 9 e 19 funções em cada direção para a estimativa da condutância térmica de contato, no caso 8, e na região entre 9 e 17 funções, no caso 9 (ver figuras 5.10 e 5.11, respectivamente).

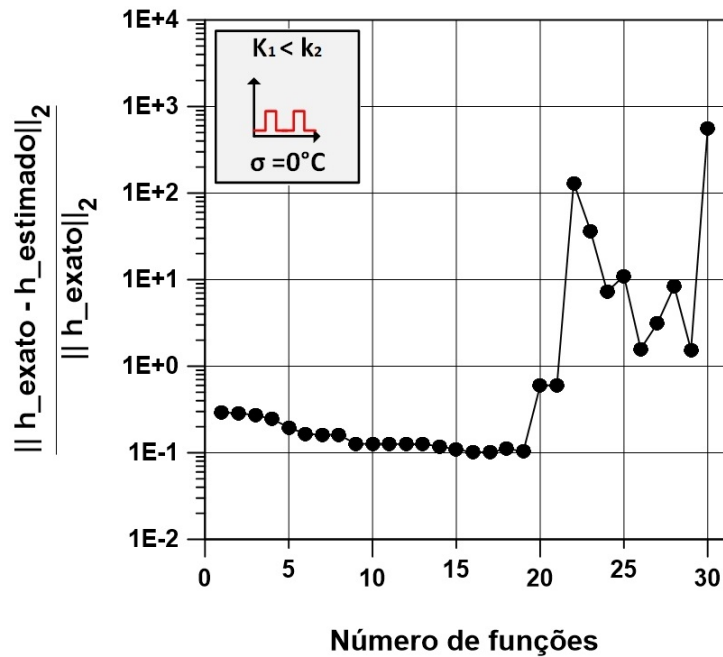


Figura 5.10: Erro relativo - Caso 8.

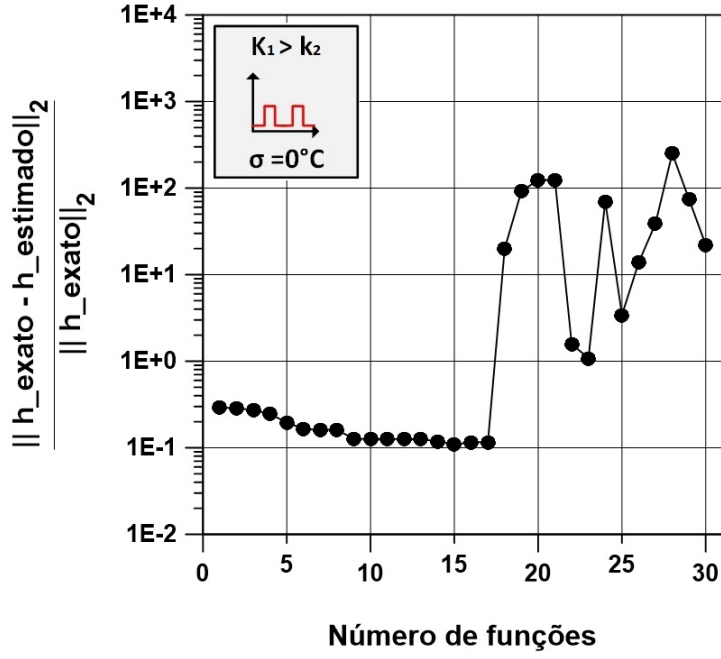


Figura 5.11: Erro relativo - Caso 9.

No caso 10 (ver figura 5.12), a região para uma boa estimativa está mais delimitada. Enquanto nos casos anteriores o número de funções ideal estava entre 9 e 19 funções, para este caso o número de funções ideal está entre 12 e 17 funções.

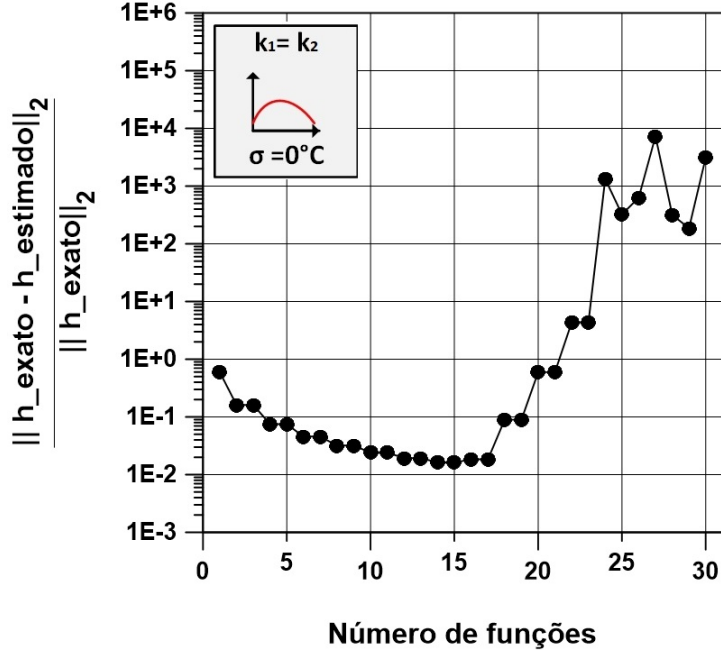


Figura 5.12: Erro relativo - Caso 10.

Como podemos observar nas figuras 5.13 e 5.14 os erros para a estimativa da condutância térmica de contato são menores na região entre 12 e 17 funções no caso 11 e na região entre 10 e 15 funções no caso 12, respectivamente.

Verificou-se que, para cada perfil de condutância térmica de contato, a região

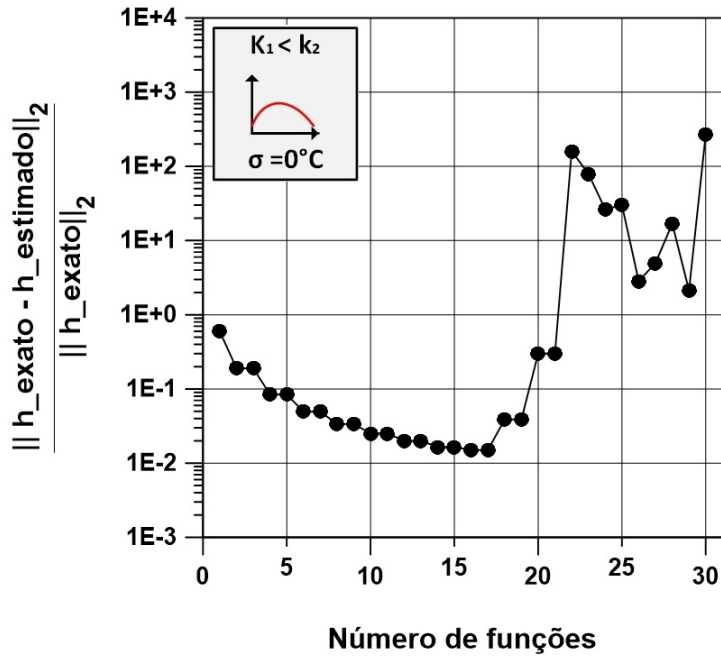


Figura 5.13: Erro relativo - Caso 11.

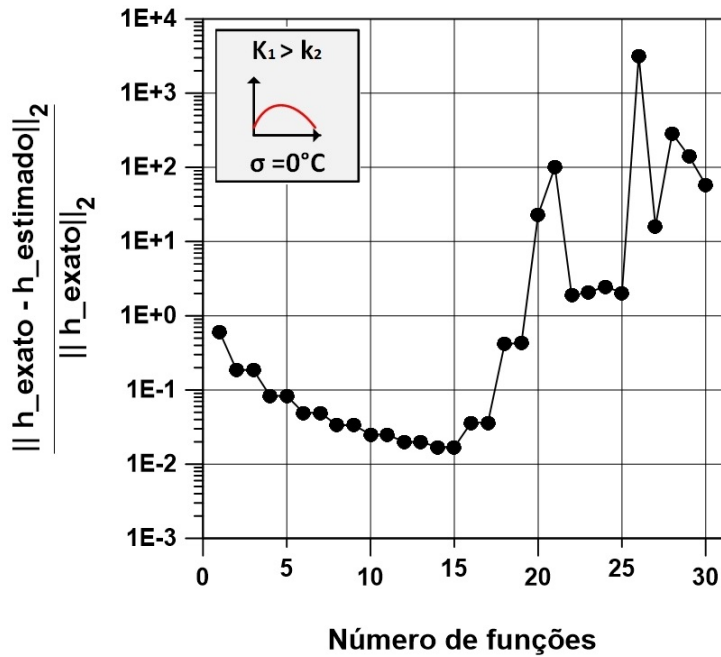


Figura 5.14: Erro relativo - Caso 12.

correspondente ao número de funções ideal, quando altera-se o material, é praticamente a mesma, mostrando que nestes casos estudados a escolha do número de funções não depende do material. Observou-se também que apesar do perfil constante (perfil 1) ter erros menores utilizando até 9 funções em cada direção, se forem utilizadas até 17 funções o erro da estimativa da condutância térmica de contato estará na mesma ordem de grandeza que o erro nos outros perfis estudados.

Para a escolha do número ideal de funções, observaram-se os intervalos contendo

os menores erros em todos casos estudados sem ruído nas medidas, isto é, para os casos 1 a 12 da tabela 5.4. Notou-se que, em todos os casos analisados, o erro com 15 funções era sempre um dos menores erros. Por este motivo, foi o número de funções escolhido para gerar as estimativas.

Deve-se ressaltar que estas análises foram realizadas utilizando medidas sem ruídos para estimar a condutância térmica de contato, mas este número de funções ideal será utilizado em todas estimativas, isto é, nos casos com e sem ruído.

A fim de averiguar a capacidade do método proposto para estimar diferentes perfis de condutância térmica de contato, foram realizados testes com perfis contínuos e descontínuos, como apresentado anteriormente. Foram realizados testes com perfis descontínuos, que são casos mais complexos, porque se o método for capaz de estimá-los, poderá estimar perfis mais simples.

Para a realização das estimativas são necessárias medidas de temperatura tomadas na superfície do corpo de prova. Estas medições possuem erros devido à imprecisão do instrumento utilizado na medição, que interfere na qualidade das estimativas. Como nesta etapa do trabalho as medidas utilizadas são sintéticas, serão introduzidos ruídos nestas medidas, simulando os erros experimentais.

Analisar a influência da inclusão de erros de medição é de extrema importância para verificar a estabilidade da solução com relação aos dados de entrada.

Os erros experimentais são introduzidos nas medidas de acordo com a Eq. (5.2) [17],

$$Y = T + \varepsilon\sigma \quad (5.2)$$

onde  $\varepsilon$  é uma variável aleatória, seguindo uma distribuição Gaussiana com média zero e variância unitária. O desvio-padrão das medidas é representado por  $\sigma$ . Para gerar um número aleatório Gaussiano com média zero e variância unitária, a transformação de Box-Muller [60] foi usada

$$\varepsilon = \sqrt{-2 \ln(\lambda_1)} \cos(2\pi\lambda_2) \quad (5.3)$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são dois números aleatórios uniformemente distribuídos entre  $[0, 1]$ .

Para realizar esta análise serão considerados os desvios-padrão de 0.2°C e de 0.4°C. Uma comparação entre as medidas antes e depois da inclusão de ruídos foi realizada para os perfis 2 e 4 (ver tabela 5.2) com configuração 1, isto é, usando dois materiais iguais. As figuras 5.15a, 5.15b e 5.15c apresentam as medidas de temperatura sem ruído, com ruído contendo um desvio-padrão de 0.2°C e com ruído contendo um desvio-padrão de 0.4°C, respectivamente, para o perfil 2 na configuração 1. Já as figuras 5.16a, 5.16b e 5.16c apresentam as medidas de temperatura sem ruído,

com ruído contendo um desvio-padrão de  $0.2^{\circ}\text{C}$  e com ruído contendo um desvio-padrão de  $0.4^{\circ}\text{C}$ , respectivamente, para o perfil 4 na configuração 1. Observa-se que a inclusão e o aumento do ruído diminui a quantidade de informação sobre as temperaturas medidas.

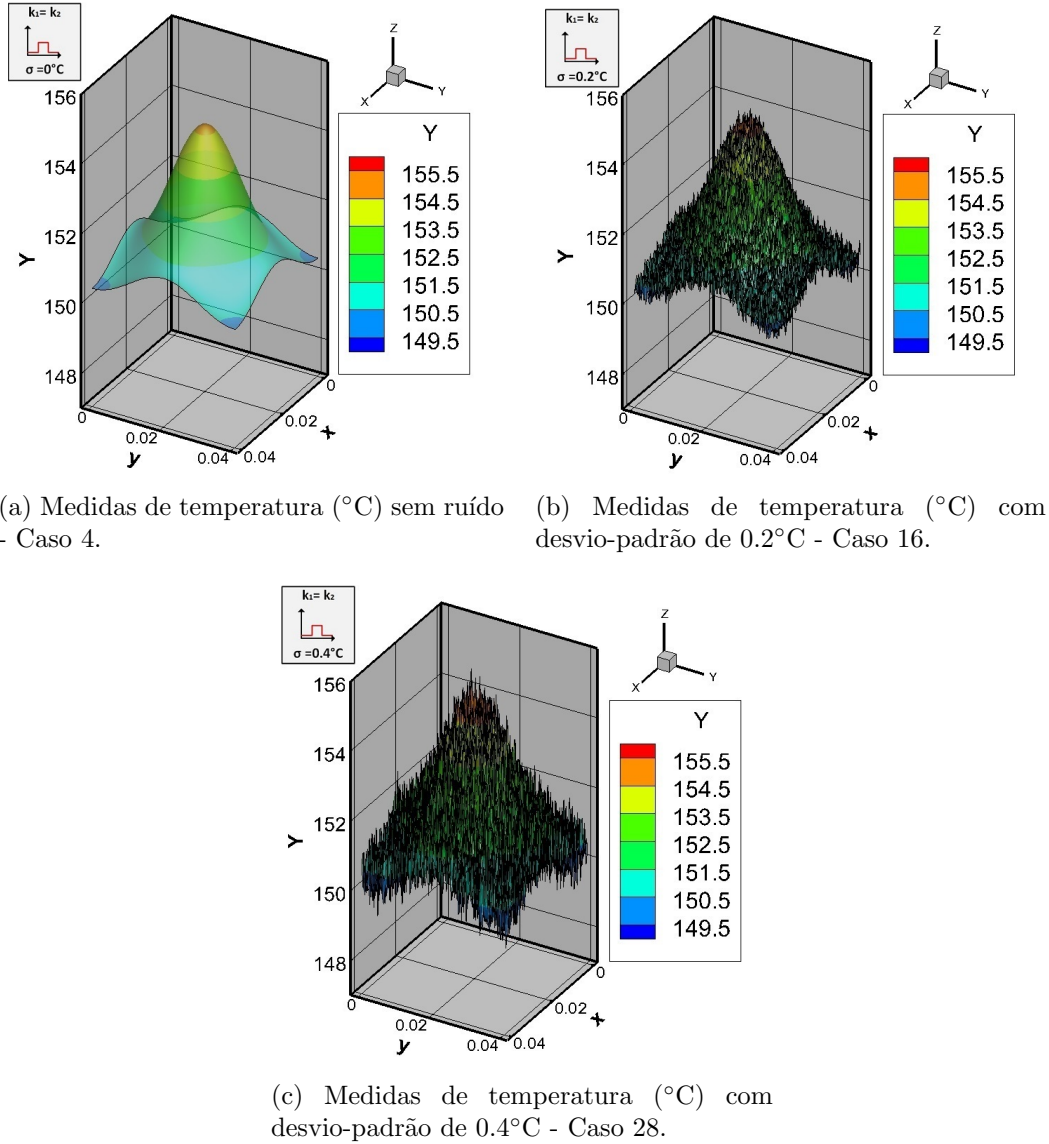
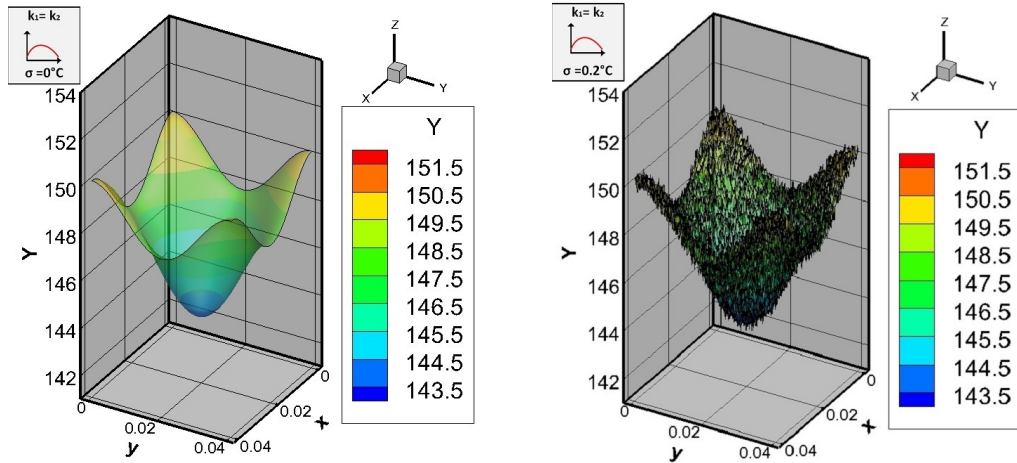


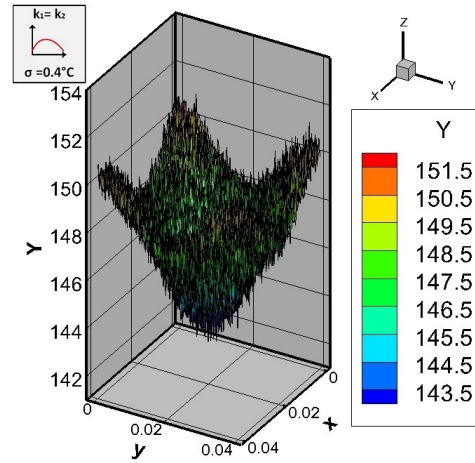
Figura 5.15: Medidas de temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) tomadas na superfície do corpo de prova - Perfil 2.

Como dito anteriormente, o método LU com refinamento iterativo foi utilizado para a solução dos sistemas lineares de todos os casos sem adição de ruídos nas medidas. Adicionando ruído nas medidas, os sistemas foram resolvidos com o método TSVD, porque nestes casos, o caráter mal condicionado do problema faz com que tais erros sejam amplificados ao se resolver o sistema linear e, desta forma, algum método de regularização torna-se necessário.

Como dito anteriormente, o método TSVD necessita da determinação de um



(a) Medidas de temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) sem ruído - Caso 10. (b) Medidas de temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) com desvio-padrão de  $0.2^{\circ}\text{C}$  - Caso 22.



(c) Medidas de temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) com desvio-padrão de  $0.4^{\circ}\text{C}$  - Caso 34.

Figura 5.16: Medidas de temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) tomadas na superfície do corpo de prova - Perfil 4.

parâmetro de corte ou truncamento. Como não há um método determinístico para a seleção deste parâmetro, foi utilizado o seguinte algoritmo:

1. Encontre o maior e menor valor singular da matriz;
2. Divida o intervalo entre o maior e o menor valor;
3. Trunque a solução em cada valor presente neste intervalo;
4. Compare a solução obtida para dois valores de truncamento sucessivos.

Os problemas auxiliares podem ser resolvidos uma única vez para cada configuração de material escolhido. Como foram consideradas 3 configurações de materiais neste trabalho (ver tabela 5.1), foram verificados os maiores e os menores valores

singulares dos problemas auxiliares 1 e 2 nas 3 configurações distintas. Em seguida, estes intervalos foram divididos em vários subintervalos.

A tabela 5.5 mostra a divisão do intervalo dos parâmetros de truncamento para cada sistema linear, considerando os valores singulares máximo e mínimo de cada configuração. Deve-se resolver os sistemas para cada parâmetro de truncamento presente na tabela 5.5. Em seguida, o salto de temperatura estimado ( $\Delta T = T_1 - T_2$ ) com um parâmetro ( $i$ ) (ver primeira coluna da tabela 5.5) é comparado com o salto de temperatura estimado com o parâmetro anterior ( $i - 1$ ), através da Eq. (5.4). O mesmo procedimento é feito com o fluxo de calor ( $q$ ) através da Eq. (5.5). Escolhe-se como parâmetro de truncamento ideal o valor que resulta nos menores valores de  $\varepsilon_i^{\Delta T}$  e  $\varepsilon_j^q$ .

$$\varepsilon_i^{\Delta T} = \|(\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2)_i - (\mathbf{T}_1 - \mathbf{T}_2)_{i-1}\|_2 \quad (5.4)$$

$$\varepsilon_j^q = \|(\mathbf{q})_j - (\mathbf{q})_{j-1}\|_2 \quad (5.5)$$

Note que, apesar dos valores singulares serem os mesmos nos problemas auxiliares de cada configuração, a escolha do melhor parâmetro não será igual para cada caso, uma vez que, para escolher o melhor parâmetro, o sistema é resolvido e, com isso, as medidas de temperatura mudam em cada caso analisado.

Assim, o melhor parâmetro de truncamento, para cada caso estudado, depende da escolha do material, do perfil da condutância térmica e do ruído adicionado. Como neste trabalho consideram-se 3 configurações diferentes, onde cada configuração possui 4 perfis e cada perfil com 2 ruídos distintos, serão analisados 24 casos, a saber os casos 13 a 36 da tabela 5.4.

Deve-se salientar que a escolha do parâmetro de truncamento não depende do valor exato da condutância térmica de contato.

Tabela 5.5: Parâmetro TSVD

Parâmetro TSVD						
	Config. 1		Config. 2		Config. 3	
$i$ ou $j$	$\Delta T$	$q$	$\Delta T$	$q$	$\Delta T$	$q$
1	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-13}$	$5 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-13}$	$1 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^{-13}$
2	$5 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-13}$	$1 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-13}$	$5 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^{-13}$
3	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-12}$	$5 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-12}$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^{-12}$
4	$5 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-12}$	$1 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-12}$	$5 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^{-12}$
5	$1 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-11}$	$5 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-11}$	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^{-11}$
6	$5 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^{-11}$	$1 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^{-11}$	$5 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^{-11}$
7	$1 \times 10^{-1}$	$1 \times 10^{-10}$	$5 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-10}$	$1 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^{-10}$
8	$5 \times 10^{-1}$	$5 \times 10^{-10}$	$1 \times 10^{-1}$	$5 \times 10^{-10}$	$5 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^{-10}$
9	$1 \times 10^0$	$1 \times 10^{-9}$	$5 \times 10^{-1}$	$1 \times 10^{-9}$	$1 \times 10^{-1}$	$1 \times 10^{-9}$
10	$5 \times 10^0$	$5 \times 10^{-9}$	$1 \times 10^0$	$5 \times 10^{-9}$	$5 \times 10^{-1}$	$5 \times 10^{-9}$
11	$1 \times 10^1$	$1 \times 10^{-8}$	$5 \times 10^0$	$1 \times 10^{-8}$	$1 \times 10^0$	$1 \times 10^{-8}$
12	$5 \times 10^1$	$5 \times 10^{-8}$	$1 \times 10^1$	$5 \times 10^{-8}$	$5 \times 10^0$	$5 \times 10^{-8}$
13	$1 \times 10^2$	$1 \times 10^{-7}$	$5 \times 10^1$	$1 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^1$	$1 \times 10^{-7}$
14	$5 \times 10^2$	$5 \times 10^{-7}$	$1 \times 10^2$	$5 \times 10^{-7}$	$5 \times 10^1$	$5 \times 10^{-7}$
15	$1 \times 10^3$	$1 \times 10^{-6}$	$5 \times 10^2$	$1 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^2$	$1 \times 10^{-6}$
16	$5 \times 10^3$	$5 \times 10^{-6}$	$1 \times 10^3$	$5 \times 10^{-6}$	$5 \times 10^2$	$5 \times 10^{-6}$
17	$1 \times 10^4$	$1 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^3$	$1 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^3$	$1 \times 10^{-5}$
18	$5 \times 10^4$	$5 \times 10^{-5}$	$1 \times 10^4$	$5 \times 10^{-5}$	$5 \times 10^3$	$5 \times 10^{-5}$
19	$1 \times 10^5$	$1 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^4$	$1 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^4$	$1 \times 10^{-4}$
20	$5 \times 10^5$	$5 \times 10^{-4}$	$1 \times 10^5$	$5 \times 10^{-4}$	$5 \times 10^4$	$5 \times 10^{-4}$
21	$1 \times 10^6$	$1 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^5$	$1 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^5$	$1 \times 10^{-3}$
22	$5 \times 10^6$	$5 \times 10^{-3}$	$1 \times 10^6$	$5 \times 10^{-3}$	$5 \times 10^5$	$5 \times 10^{-3}$
23	$1 \times 10^7$	$1 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^6$	$1 \times 10^{-2}$	$1 \times 10^6$	$1 \times 10^{-2}$
24		$5 \times 10^{-2}$		$5 \times 10^{-2}$	$5 \times 10^6$	$5 \times 10^{-2}$
25		$1 \times 10^{-1}$		$1 \times 10^{-1}$		$1 \times 10^{-1}$
26		$5 \times 10^{-1}$		$5 \times 10^{-1}$		$5 \times 10^{-1}$
27		$1 \times 10^0$		$1 \times 10^0$		$1 \times 10^0$



A figura 5.17 apresenta o erro entre as estimativas do salto de temperatura e entre as estimativas do fluxo de calor conforme definido nas Eqs. (5.4) e (5.5) para o caso 13, isto é, dois materiais iguais, perfil de condutância térmica constante e ruído adicionado nas medidas com desvio-padrão  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ . A figura 5.18 difere do caso anterior simplesmente pela mudança do desvio-padrão para  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$  e se refere ao caso 25. Note que, em ambos os casos, para o sistema linear do salto de temperatura (ver figuras 5.17a e 5.18a), o menor erro acontece para o parâmetro de truncamento 22, que de acordo com a tabela 5.5 tem valor  $5 \times 10^6$ . Para o sistema linear do fluxo de calor (ver figuras 5.17b e 5.18b) o menor erro acontece para o parâmetro de truncamento 26, que de acordo com a tabela 5.5 tem valor  $5 \times 10^{-1}$ .

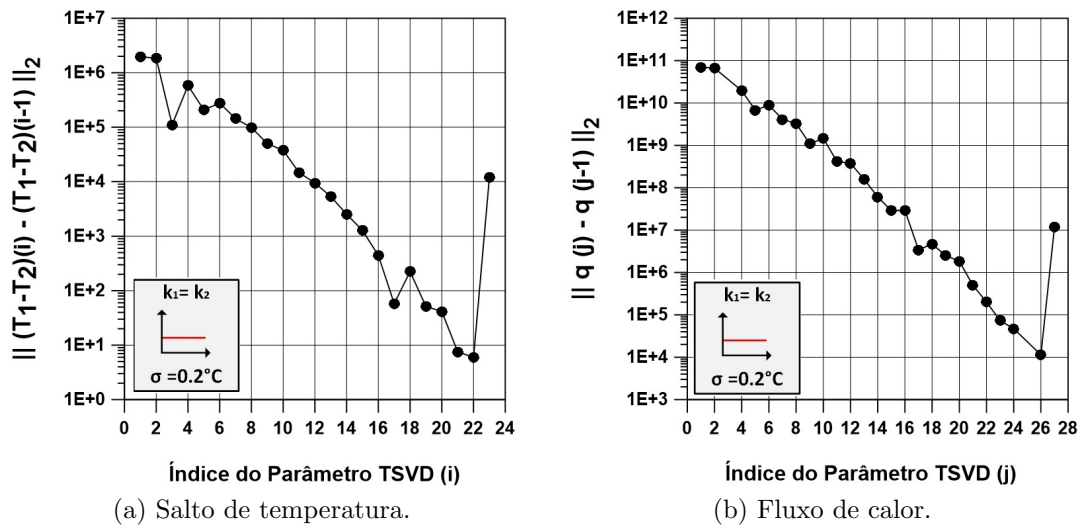


Figura 5.17: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 13 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ).

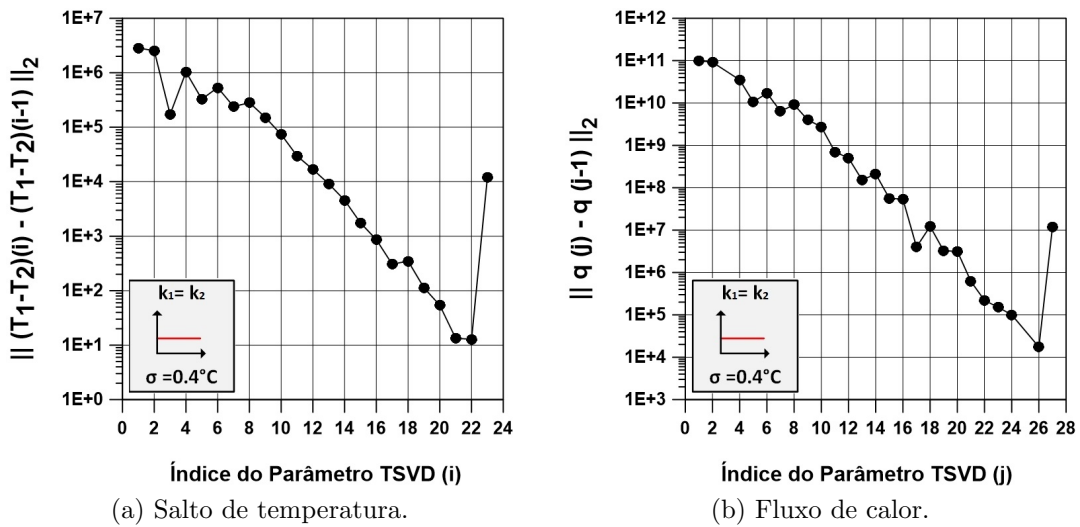


Figura 5.18: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 25 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ).

Analisando ainda o perfil 1, na configuração 2 do material, as figuras 5.19 e 5.20 apresentam o erro entre as estimativas do salto de temperatura e entre as estimativas do fluxo de calor de acordo com as Eqs. (5.4) e (5.5) para os casos 14 e 26, respectivamente. Analisando as figuras 5.19a e 5.20a, nota-se que o menor erro acontece para o parâmetro de truncamento 22 que de acordo com a tabela 5.5 tem valor  $1 \times 10^6$ . Para os sistemas lineares do fluxo de calor, o parâmetro de truncamento ideal é  $5 \times 10^{-1}$  para ambos os casos.

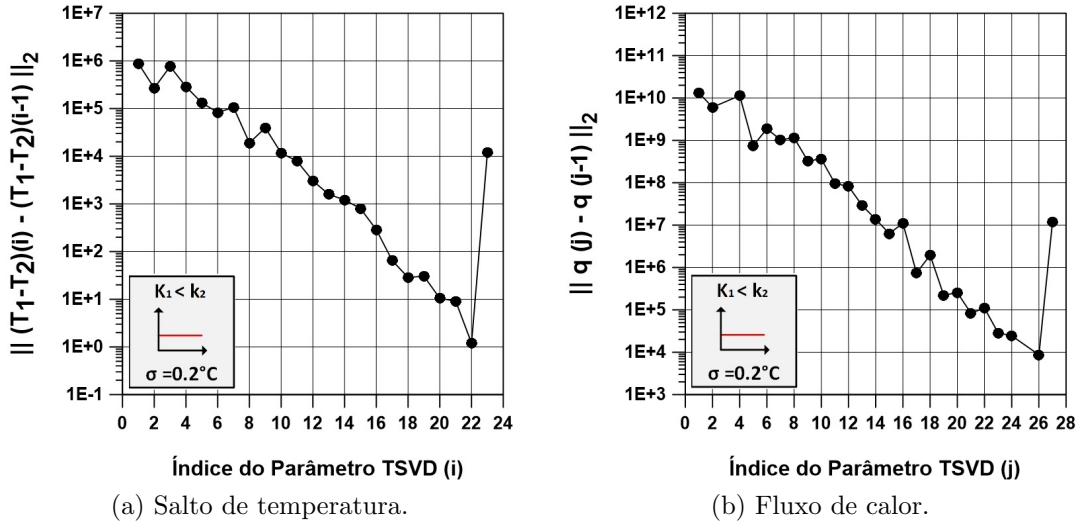


Figura 5.19: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 14 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ).

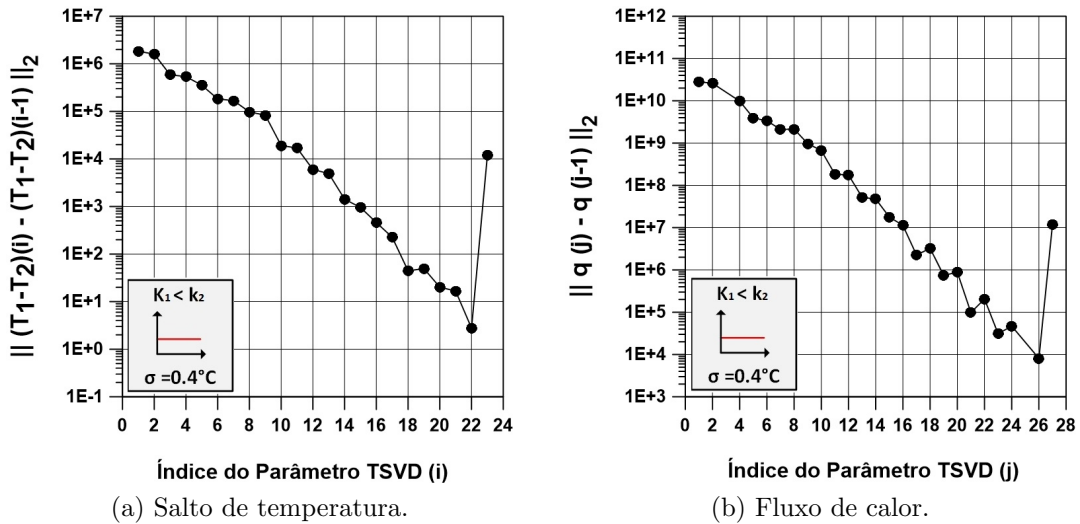


Figura 5.20: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 26 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ).

Mantendo perfil 1 e mudando para configuração 3 do material, as figuras 5.21 e 5.22 apresentam os erros calculados de acordo com as Eqs. (5.4) e (5.5) para a escolha dos parâmetros de truncamento nos casos 15 e 27, respectivamente. Analisando estas figuras e de acordo com a tabela 5.5, para o sistema linear do salto de temperatura, nos dois casos, o parâmetro de truncamento ideal tem valor  $1 \times 10^6$ . Para o sistema linear do fluxo de calor, o parâmetro de truncamento ideal é  $5 \times 10^{-1}$ , também para ambos os casos.

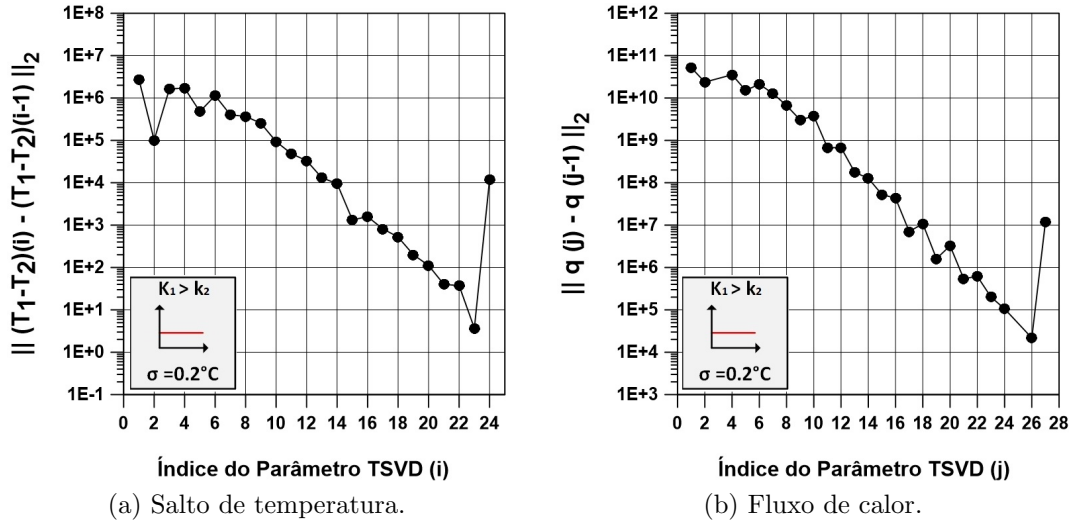


Figura 5.21: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 15 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ).

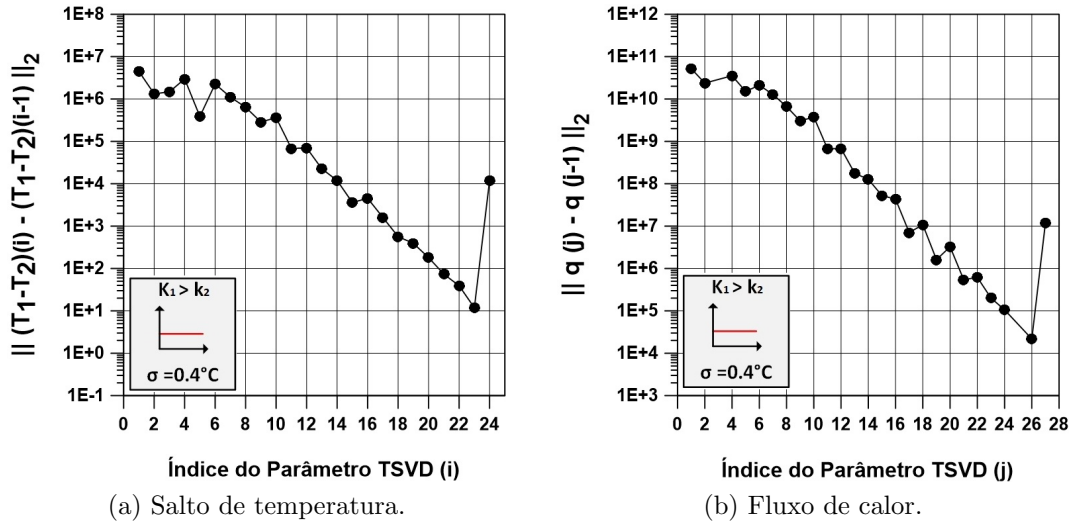


Figura 5.22: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 27 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ).

A figura 5.23 apresenta o erro para a escolha dos parâmetros de truncamento para o caso 16, isto é, dois materiais iguais, condutância térmica de contato com perfil 2 e ruído adicionado nas medidas com desvio-padrão  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ . Note que, em ambos os sistemas há uma região de melhores parâmetros. Nesta região as

estimativas são bem parecidas. Para o sistema linear do salto de temperatura, o menor erro acontece para o parâmetro de truncamento 19, que de acordo com a tabela 5.5 tem valor  $1 \times 10^5$ . Para o sistema linear do fluxo de calor, o menor erro acontece para o parâmetro de truncamento 21, que de acordo com a tabela 5.5 tem valor  $1 \times 10^{-3}$ .

A figura 5.24 apresenta o erro para escolha dos parâmetros de truncamento para o caso 28, isto é, com o mesmo perfil e material do caso 16 mas com ruído de  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ . Os parâmetros ideais são os mesmos parâmetros do caso anterior, isto é,  $1 \times 10^5$  para o sistema do salto de temperatura e  $1 \times 10^{-3}$  para o sistema do fluxo de calor.

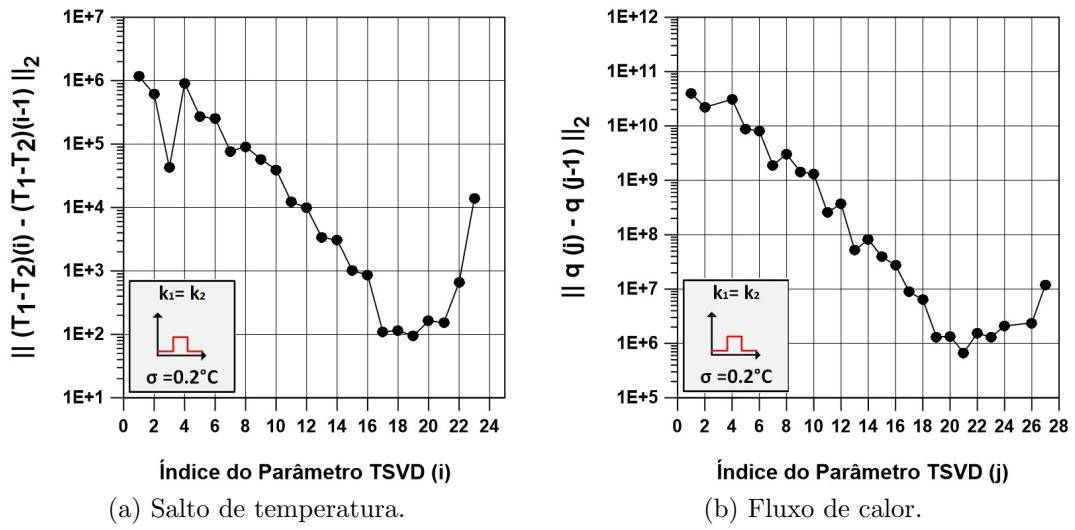


Figura 5.23: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 16 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ).

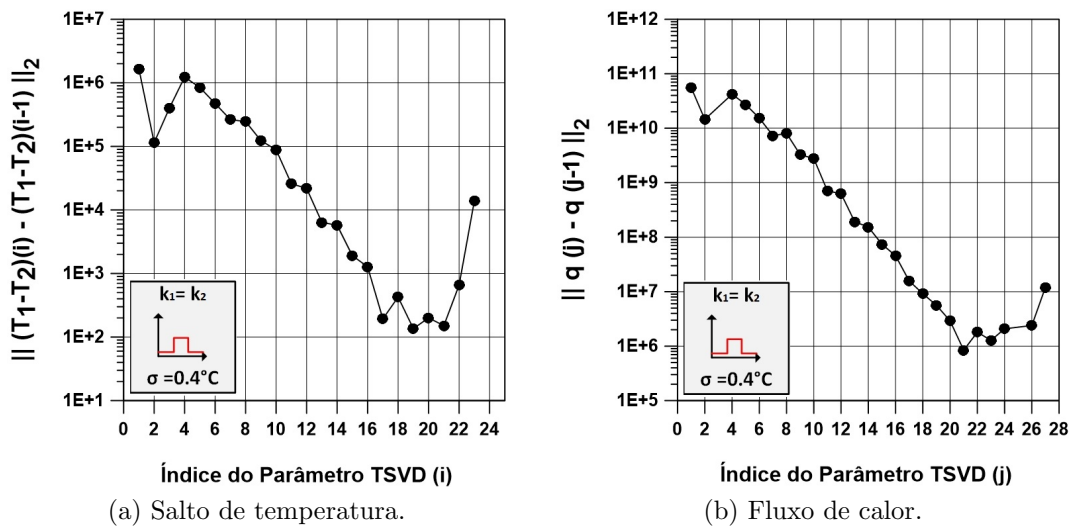


Figura 5.24: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 28 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ).

Ainda no perfil 2, deve-se escolher os parâmetros de truncamento para os casos com materiais distintos (configuração 2). A figura 5.25 é referente a escolha dos parâmetros de truncamento para o caso 17 e a figura 5.26 para o caso 29. Esses casos diferem entre si no valor do desvio-padrão das medidas.

Note que, em ambos os casos, para o sistema linear do salto de temperatura (ver figuras 5.25a e 5.26a) o menor erro acontece no parâmetro 18, que de acordo com a tabela 5.5 tem valor  $1 \times 10^4$ . Para o sistema linear do fluxo de calor com desvio-padrão  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$  (ver figura 5.25b), o menor erro acontece para o parâmetro 20, que de acordo com a tabela 5.5 tem valor  $5 \times 10^{-4}$ . Aumentando o desvio-padrão (ver figura 5.26b) o valor ideal é  $1 \times 10^{-3}$ .

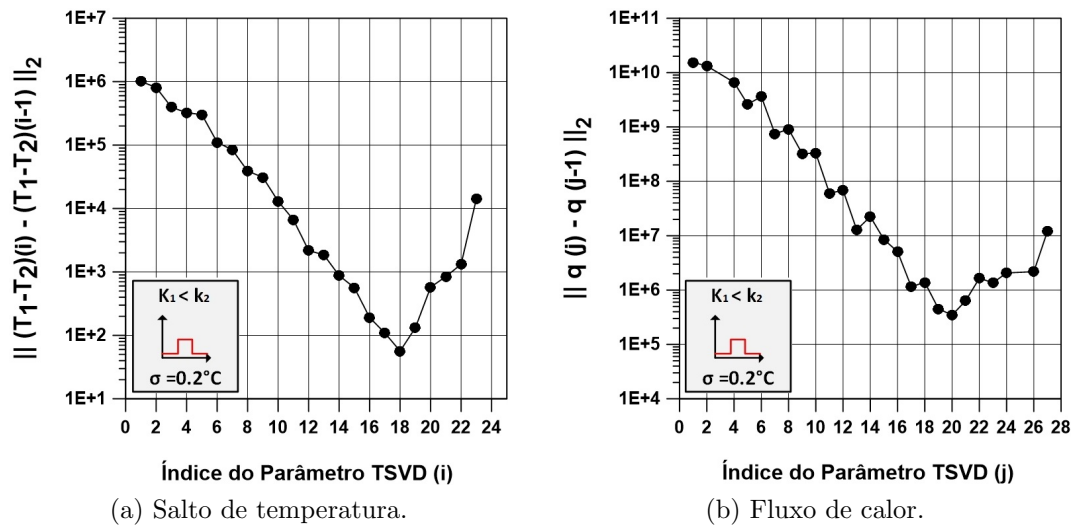


Figura 5.25: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 17 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ).

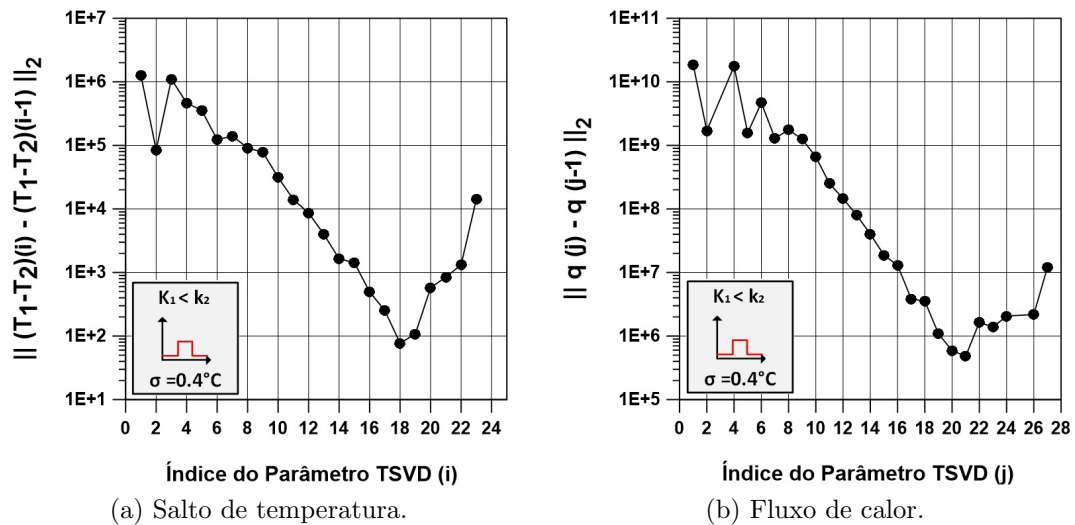


Figura 5.26: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 29 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ).

Mudando somente a ordem dos materiais, isto é, utilizando a configuração 3, tem-se a figura 5.27 para o caso 18 e a figura 5.28 para o caso 30. Esses casos diferem entre si no valor do desvio-padrão das medidas.

Para o sistema linear do salto de temperatura com desvio-padrão  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$  (ver figura 5.27a) o menor erro acontece para o parâmetro 19, que de acordo com a tabela 5.5 tem valor  $1 \times 10^4$ . Aumentando o desvio-padrão (ver figura 5.28a) o valor ideal é  $5 \times 10^4$ . Em ambos os casos, para o sistema linear do fluxo de calor (ver figuras 5.27b e 5.28b) o menor erro acontece para o parâmetro 21, que de acordo com a tabela 5.5 tem valor  $1 \times 10^{-3}$ .

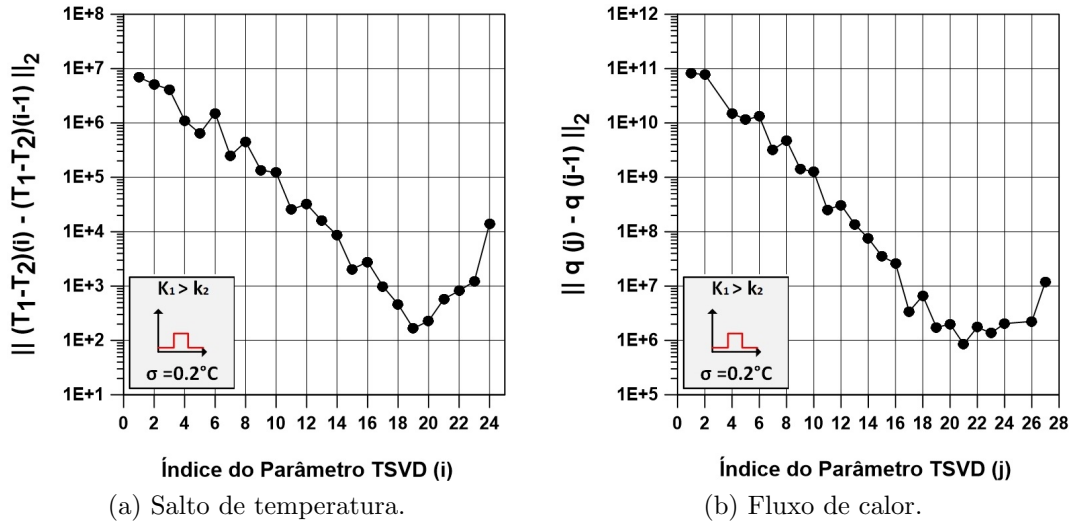


Figura 5.27: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 18 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ).

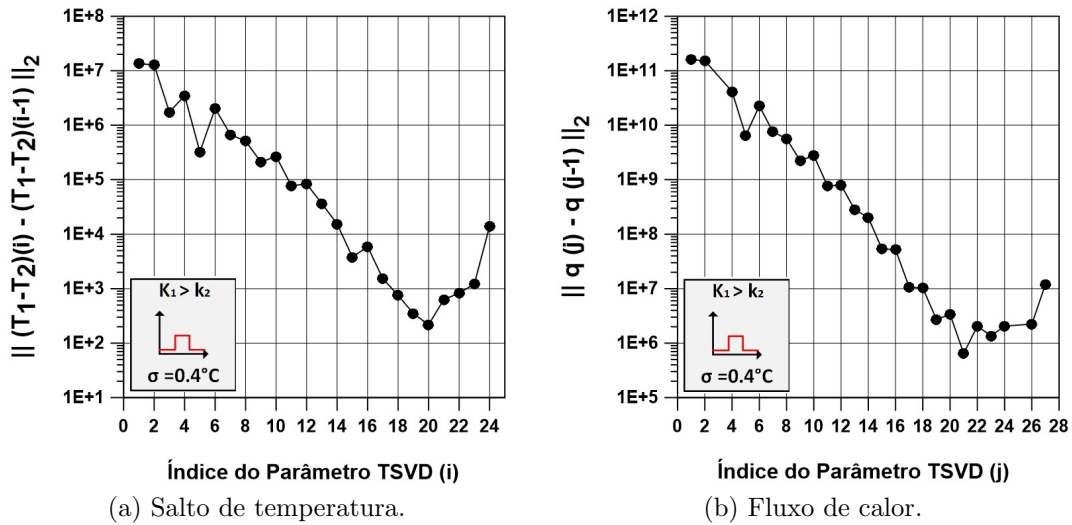


Figura 5.28: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 30 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ).

Também foi realizada a escolha dos parâmetros de truncamento para os perfis 3 e 4, com as diferentes configurações dos materiais e com os dois níveis de ruído adicionado nas medidas, isto é, para os casos 19–24 e 31–36. Como o procedimento é o mesmo apresentado para os casos com perfil 1 e 2, estes resultados se encontram no Apêndice A.

A tabela 5.6 mostra o parâmetro truncamento ideal para cada caso estudado. Deve-se ressaltar que os casos sem ruídos nas medidas, isto é, os casos de 1 a 12, não precisam de parâmetro de truncamento porque são resolvidos com o método LU e, por este motivo, não aparecem nesta tabela.

Tabela 5.6: Parâmetro de truncamento ideal

<b>Parâmetro de truncamento ideal</b>		
	$\Delta T$	$q$
<b>Caso 13</b>	$5 \times 10^6$	$5 \times 10^{-1}$
<b>Caso 14</b>	$1 \times 10^6$	$5 \times 10^{-1}$
<b>Caso 15</b>	$1 \times 10^6$	$5 \times 10^{-1}$
<b>Caso 16</b>	$1 \times 10^5$	$1 \times 10^{-3}$
<b>Caso 17</b>	$1 \times 10^4$	$5 \times 10^{-4}$
<b>Caso 18</b>	$1 \times 10^4$	$1 \times 10^{-3}$
<b>Caso 19</b>	$1 \times 10^5$	$1 \times 10^{-3}$
<b>Caso 20</b>	$5 \times 10^3$	$1 \times 10^{-4}$
<b>Caso 21</b>	$5 \times 10^4$	$1 \times 10^{-3}$
<b>Caso 22</b>	$1 \times 10^5$	$1 \times 10^{-3}$
<b>Caso 23</b>	$5 \times 10^4$	$1 \times 10^{-3}$
<b>Caso 24</b>	$5 \times 10^4$	$1 \times 10^{-3}$
<b>Caso 25</b>	$5 \times 10^6$	$5 \times 10^{-1}$
<b>Caso 26</b>	$1 \times 10^6$	$5 \times 10^{-1}$
<b>Caso 27</b>	$1 \times 10^6$	$5 \times 10^{-1}$
<b>Caso 28</b>	$1 \times 10^5$	$1 \times 10^{-3}$
<b>Caso 29</b>	$1 \times 10^4$	$1 \times 10^{-3}$
<b>Caso 30</b>	$5 \times 10^4$	$1 \times 10^{-3}$
<b>Caso 31</b>	$1 \times 10^5$	$1 \times 10^{-3}$
<b>Caso 32</b>	$5 \times 10^4$	$1 \times 10^{-3}$
<b>Caso 33</b>	$5 \times 10^4$	$1 \times 10^{-3}$
<b>Caso 34</b>	$5 \times 10^5$	$1 \times 10^{-3}$
<b>Caso 35</b>	$5 \times 10^4$	$1 \times 10^{-3}$
<b>Caso 36</b>	$5 \times 10^4$	$5 \times 10^{-3}$

Após a definição do número de funções na base ortonormal e do parâmetro de truncamento para cada caso, pode-se realizar a estimativa da condutância térmica de contato.

## Estimativa do Perfil 1 - Dois materiais iguais (configuração 1)

Nesta seção serão apresentadas as estimativas do perfil 1 com dois materiais iguais, com e sem ruído nas medidas, isto é, serão apresentados os casos 1, 13 e 25. Para realizar a estimativa da condutância térmica de contato, deve-se estimar o salto de temperatura e o fluxo de calor, ambos na interface.

A figura 5.29 apresenta os perfis exato e estimados do salto de temperatura na interface. Pode-se observar que o salto de temperatura exato tem valor constante  $T_1 - T_2 = 100^\circ\text{C}$  (ver figura 5.29a). A estimativa sem ruído nas medidas, isto é, caso 1 (ver figura 5.29b), apresenta uma pequena oscilação em torno do valor exato. Já para os casos com ruído, isto é, casos 13 e 25 (figuras 5.29c e 5.29d, respectivamente) as oscilações são suavizadas devido ao parâmetro de truncamento escolhido. Ainda assim, as estimativas estão bem próximas do valor exato.

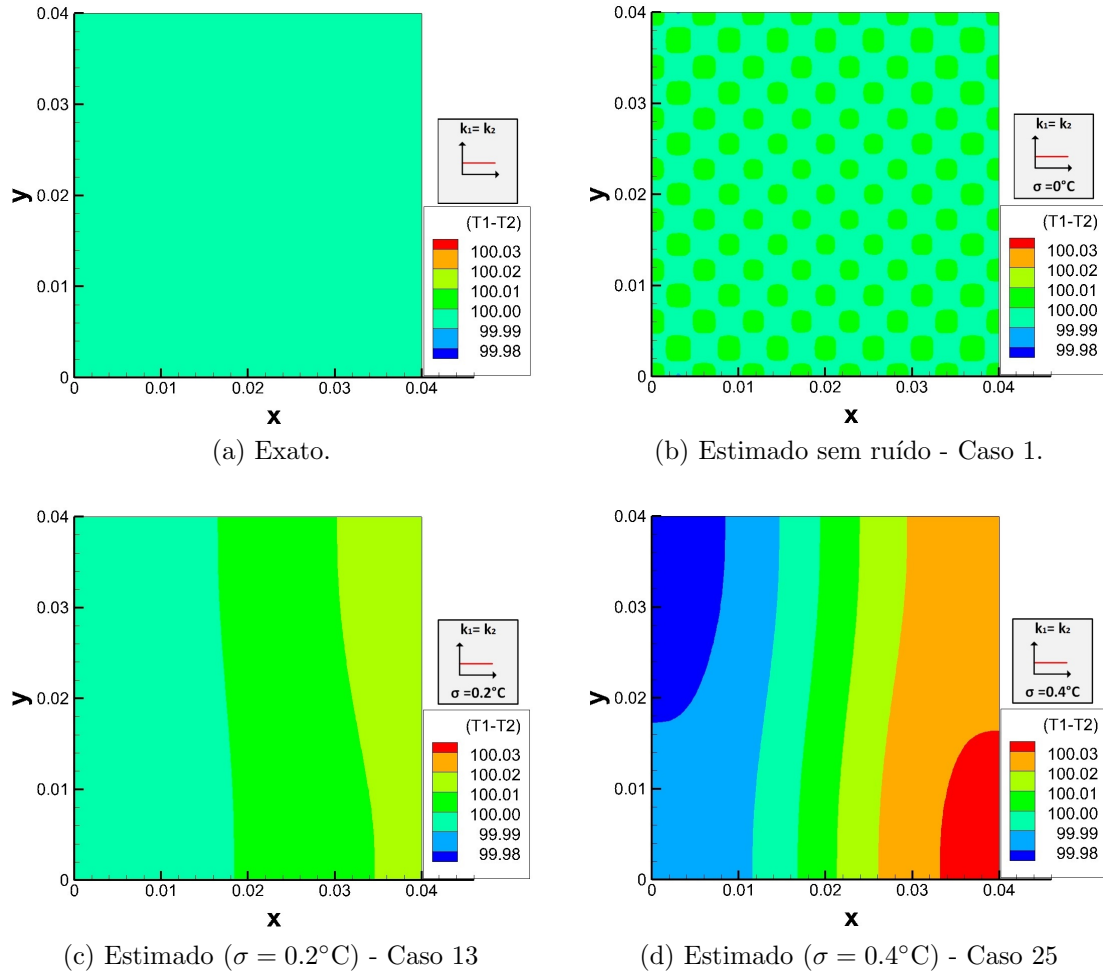


Figura 5.29: Salto de Temperatura ( $^\circ\text{C}$ ) - Perfil 1 - Configuração 1.



A figura 5.30 apresenta os perfis exato e estimados do fluxo de calor na interface. O fluxo de calor exato tem valor constante  $q = -1 \times 10^5 (\text{W/m}^2)$  (ver figura 5.30a). Assim como na estimativa do salto de temperatura, a estimativa do fluxo de calor sem ruído nas medidas, isto é, caso 1 (ver figura 5.30b), oscila em torno do valor exato. Nos casos com ruído nas medidas, isto é, casos 13 e 25 (figuras 5.30c e 5.30d, respectivamente) as oscilações também foram suavizadas devido ao uso do método TSVD.

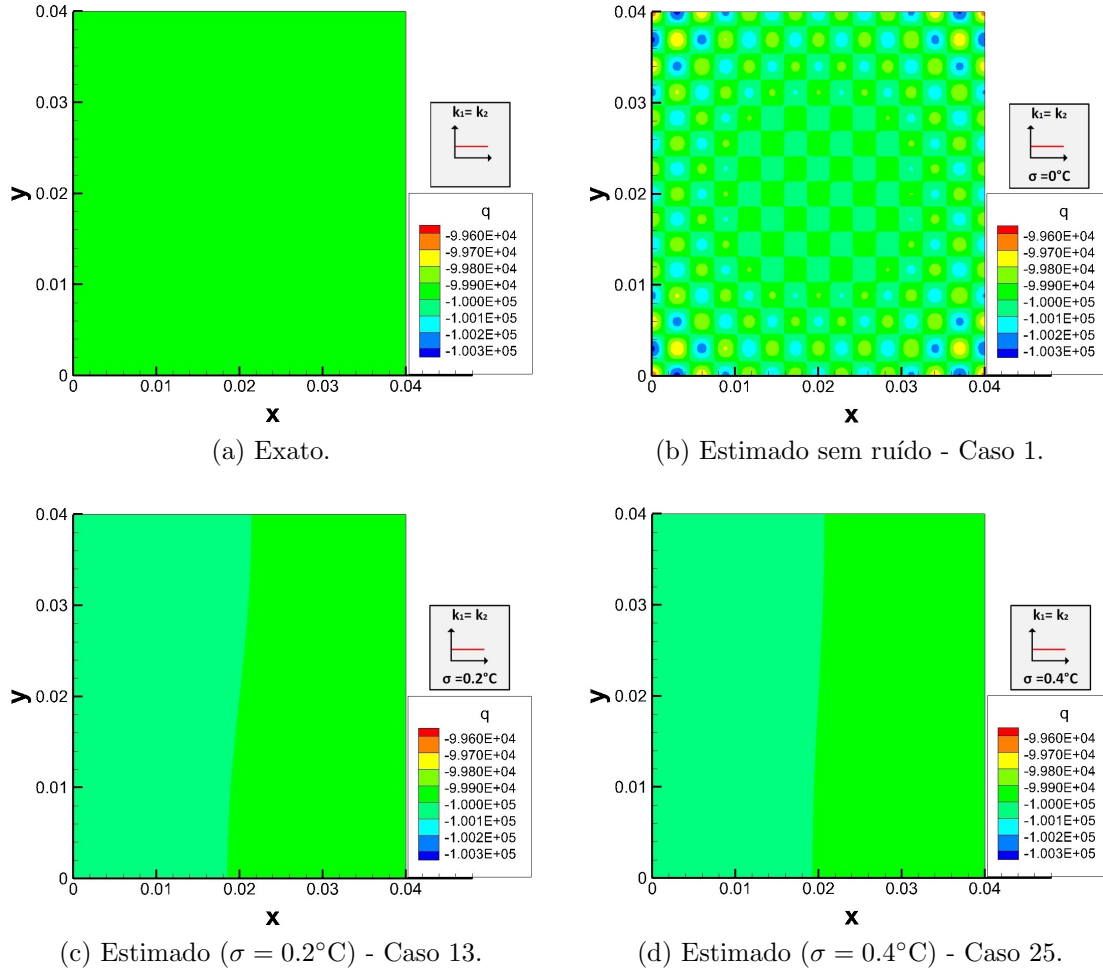


Figura 5.30: Fluxo de calor ( $\text{W/m}^2$ ) - Perfil 1 - Configuração 1.

Deve-se salientar que a presença dessas oscilações é devido ao uso da base de Fourier, que possui senos e cossenos em sua definição e, portanto, as oscilações serão um comportamento normal nas estimativas.

Após realizar a estimativa do salto de temperatura e do fluxo de calor na interface, pode-se realizar a estimativa da condutância térmica de contato como foi visto na subseção 4.2.2.

A figura 5.31a apresenta o perfil exato da condutância térmica de contato, a qual é constante com valor  $h = 10^3 \text{W/m}^2\text{°C}$ . A figura 5.31b apresenta a estimativa

da condutância térmica de contato sem ruído nas medidas. Pode-se observar que, apesar das oscilações, o valor está muito próximo do valor exato. As figuras 5.31c e 5.31d mostram as estimativas com ruído nas medidas, isto é, caso 13 e caso 25, respectivamente. Note que as estimativas estão em ótima concordância com o perfil exato, até mesmo quando aumenta-se o desvio-padrão das medidas para  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ .

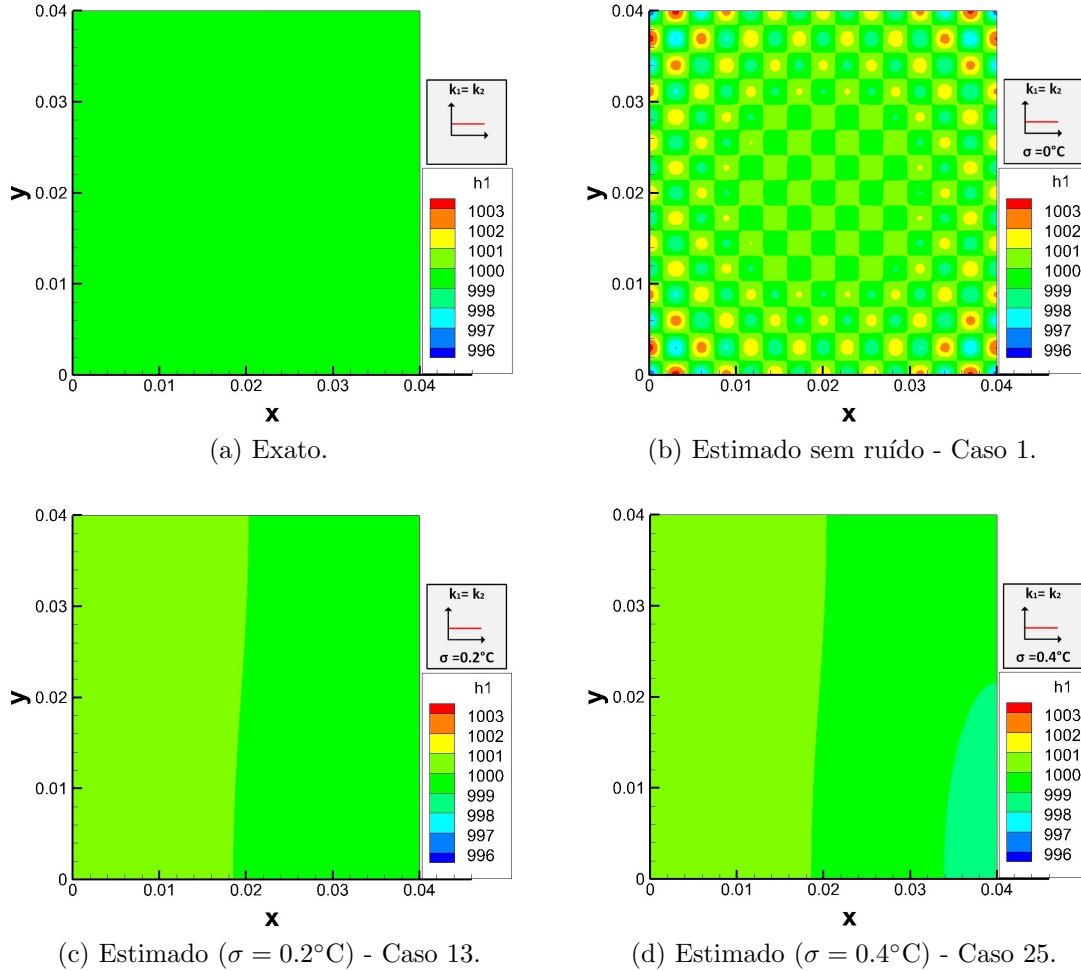


Figura 5.31: Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 1 - Configuração 1.

A fim de verificar a qualidade das soluções obtidas, será analisado o resíduo dessas soluções. No método utilizado neste trabalho, o campo de temperatura não é estimado junto com a grandeza de interesse. Por este motivo, após realizar as estimativas e encontrar a condutância térmica de contato, o perfil encontrado é utilizado como dado de entrada no problema direto. Ao resolver o problema direto com o perfil estimado, encontra-se a temperatura estimada na superfície superior do material e, assim, obtém-se o resíduo através da Eq. (5.6), onde  $Y$  é a temperatura medida e  $T$  é a temperatura estimada, ambas em  $\Gamma_0$ .

$$Res = (Y - T) \quad (5.6)$$

As figuras 5.32a e 5.32b apresentam o resíduo nos casos 13 e 25, respectivamente. Como pode-se observar nos dois casos, os resíduos oscilam ao redor do 0. Para o caso com desvio-padrão menor, nota-se que o resíduo está na mesma ordem de grandeza do desvio-padrão, isto é,  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ . Aumentando o desvio-padrão, tem-se um resíduo alto quando comparado ao desvio-padrão  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ . No entanto, deve-se salientar que, para determinar as medidas, o problema direto foi resolvido utilizando uma malha contendo  $241 \times 241 \times 61$  pontos. Já para calcular a temperatura estimada, o problema direto foi resolvido com uma malha contendo  $121 \times 121 \times 31$  pontos.

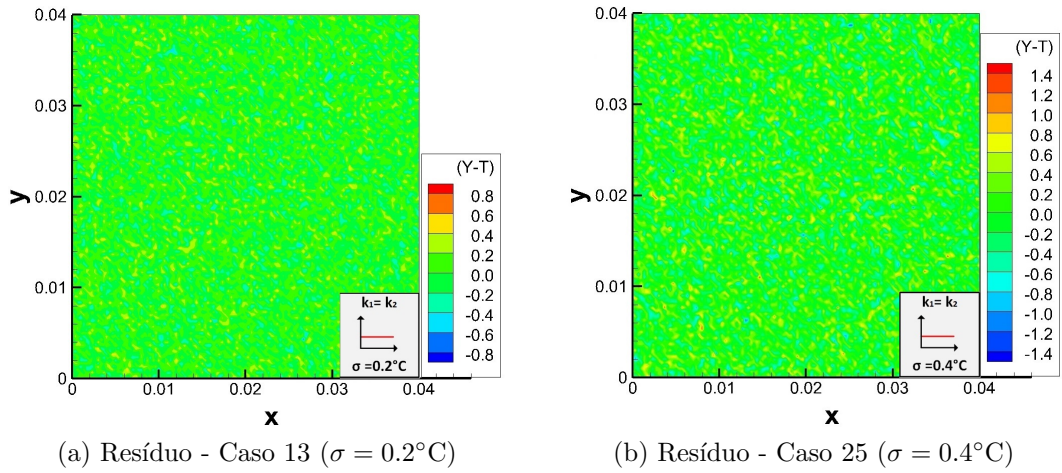
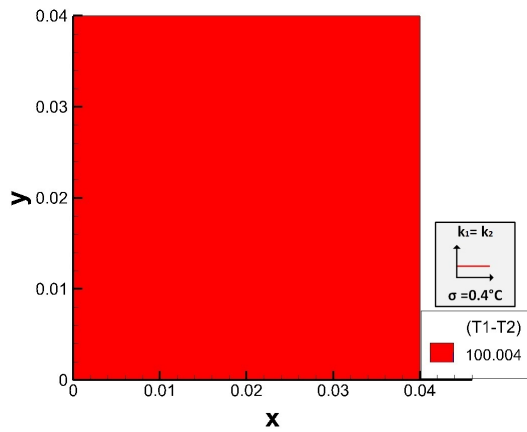


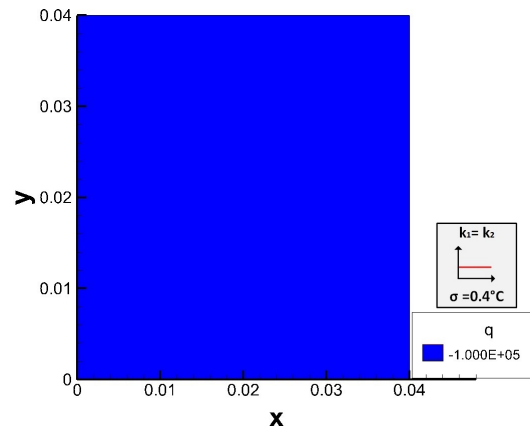
Figura 5.32: Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 1 - Configuração 1.

Como dito anteriormente, foram utilizadas 15 funções em cada direção na base ortonormal, isto é,  $\psi_{225} = \psi_x^{15} \times \psi_y^{15}$ . Este foi o número ideal de funções para realizar a estimativa de qualquer perfil, uma vez que em um caso real não se sabe de antemão o perfil a ser estimado. Se houver conhecimento a priori de que o perfil é constante, pode-se utilizar somente 1 função em cada direção na base ortonormal, isto é,  $\psi_1 = \psi_x^1 \times \psi_y^1$ .

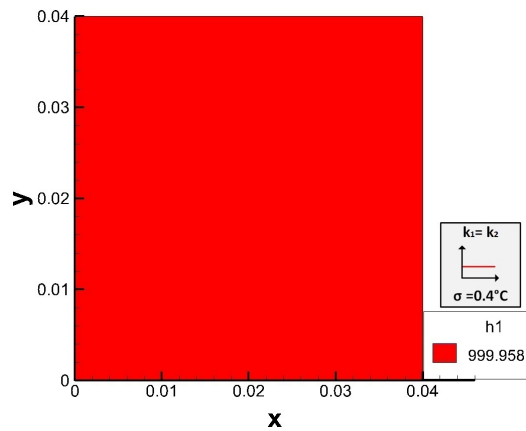
A figura 5.33 apresenta a estimativa do salto de temperatura, do fluxo de calor e da condutância térmica de contato para o caso 25 utilizando  $\psi_1 = \psi_x^1 \times \psi_y^1$ . Neste caso tem-se dois materiais iguais, perfil de condutância térmica constante e ruído adicionado nas medidas com  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ . Mesmo com a inclusão de ruído nas medidas não foi necessária a utilização do método TSVD. Os resultados estão em ótima concordância com os perfis exatos, onde o salto de temperatura, o fluxo de calor e a condutância térmica de contato possuem valor constante de  $T_1 - T_2 = 100^\circ\text{C}$ ,  $q = -10^5\text{W/m}^2$  e  $h = 10^3\text{W/m}^2\text{C}$ , respectivamente.



(a) Estimativa do salto de temperatura - Caso 25.



(b) Estimativa do fluxo de calor - Caso 25.



(c) Estimativa da condutância térmica de contato - Caso 25.

Figura 5.33: Estimativa com 1 função em cada direção - Perfil 1 - Configuração 1 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ).

### Estimativa do Perfil 1 - Dois materiais diferentes (configuração 2)

A figura 5.34 mostra os saltos de temperatura exato e estimados do perfil 1 com a configuração 2. São apresentados os casos sem e com ruído, isto é, casos 2, 14 e 26, respectivamente. A figura 5.34b apresenta a estimativa para o caso 2, isto é, sem ruído nas medidas. Note que apesar das oscilações, a estimativa está em boa concordância com a exata. As figuras 5.34c e 5.34d apresentam as estimativas para os casos 14 e 26, respectivamente. Observe que as estimativas com ruído nas medidas foram suavizadas pela escolha do parâmetro de truncamento e possuem ótima concordância com o perfil exato.

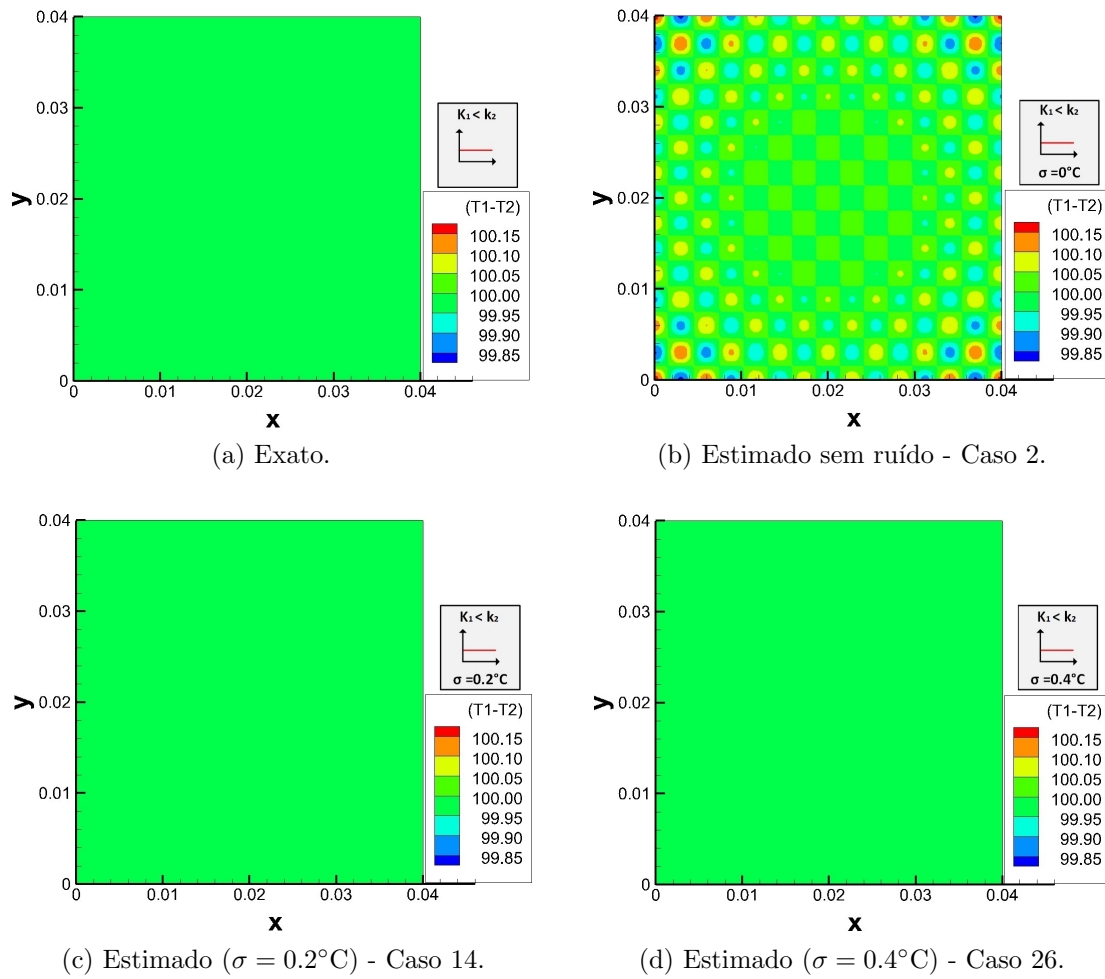


Figura 5.34: Salto de Temperatura ( $^\circ\text{C}$ ) - Perfil 1 - Configuração 2.

A figura 5.35 mostra os fluxos de calor exato e estimados do perfil 1 com a configuração 2, isto é, além do perfil exato, os casos 2, 14 e 26, respectivamente. Todos os casos estimados estão em boa concordância com o exato.

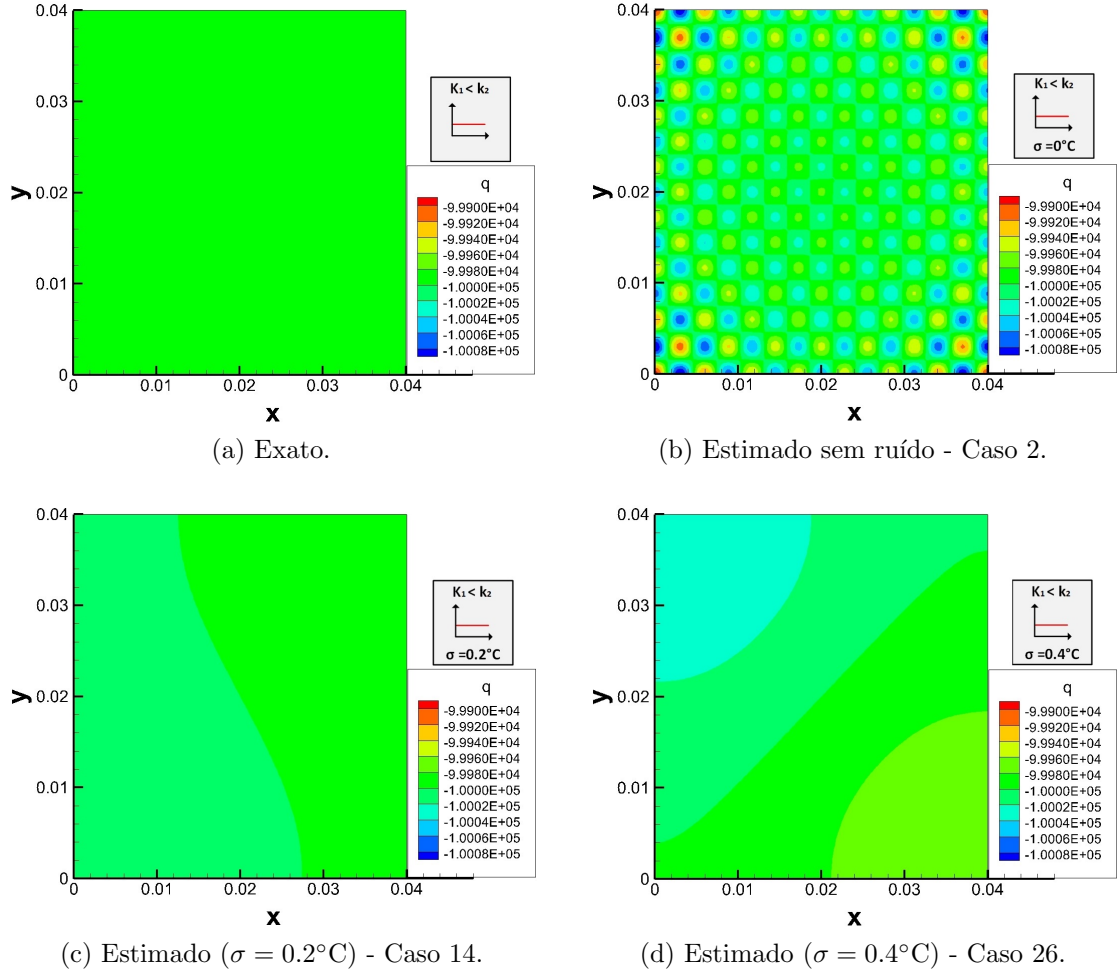


Figura 5.35: Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 1 - Configuração 2.

A figura 5.36 apresenta a condutância térmica de contato exata (ver figura 5.36a) e as condutâncias estimadas sem ruído, com ruído com desvio-padrão  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$  e com ruído com desvio-padrão  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$  (ver figuras 5.36b, 5.36c e 5.36d). Note que todas as estimativas estão em ótima concordância com o valor exato.

As figuras 5.37b e 5.37b apresentam o resíduo nos casos 14 e 26, respectivamente. Pode-se observar o mesmo comportamento encontrado na figura 5.32.



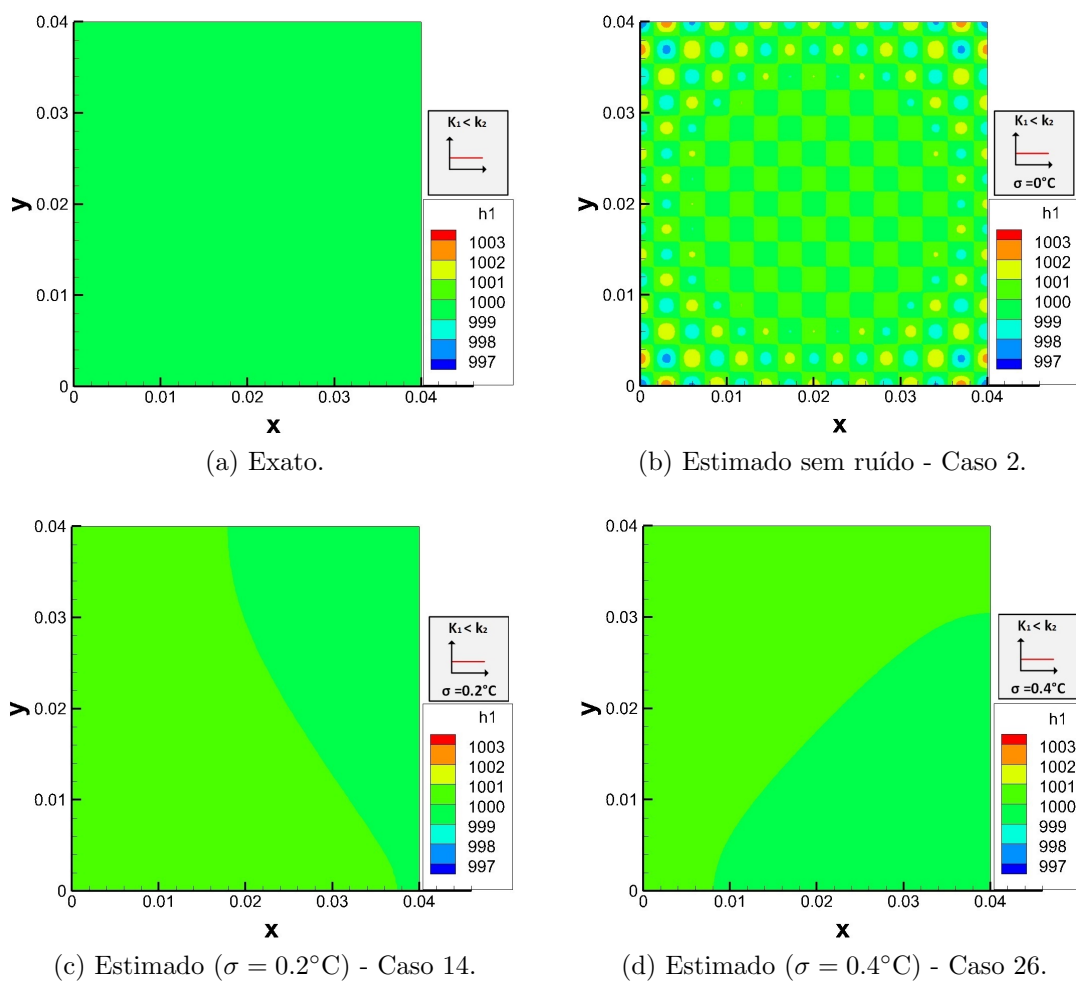


Figura 5.36: Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 1 - Configuração 2.

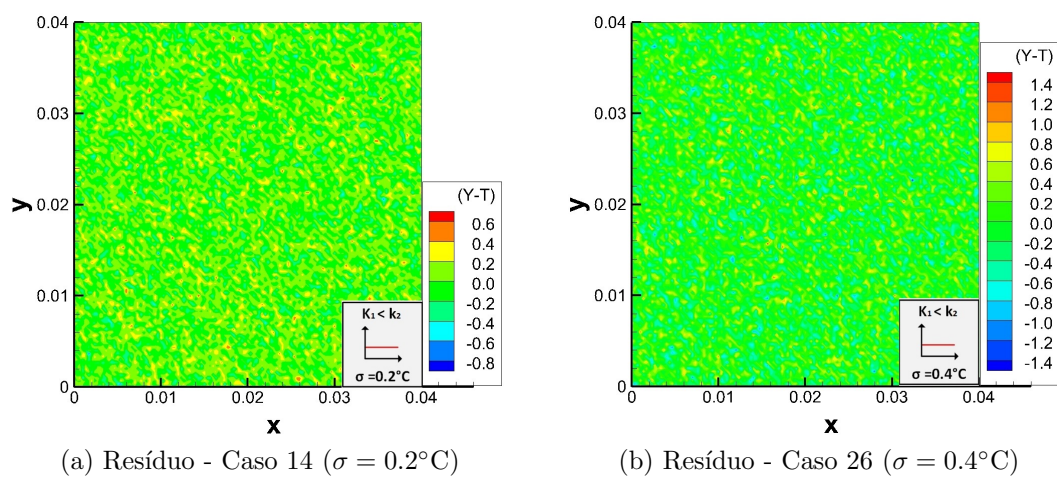


Figura 5.37: Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 1 - Configuração 2.

### Estimativa do Perfil 1 - Dois materiais diferentes (configuração 3)

A figura 5.38a mostra o salto de temperatura exato do perfil 1 com a configuração 3. Nesta configuração altera-se a ordem dos materiais apresentada na configuração 2. São apresentadas as estimativas sem e com ruído, isto é, os casos 3, 15 e 27, respectivamente. A figura 5.38b apresenta a estimativa para o caso 3, isto é, sem ruído nas medidas. Note que a amplitude das oscilações é bem maior neste caso, quando comparada com a mesma estimativa nos casos anteriores (ver figuras 5.29b e 5.34b). Ainda assim, a estimativa está em boa concordância com o salto de temperatura exato. As figuras 5.38c e 5.38d apresentam as estimativas para os casos 15 e 27, respectivamente. Novamente, as estimativas com ruído nas medidas foram suavizadas pela escolha do parâmetro de truncamento do método TSVD.

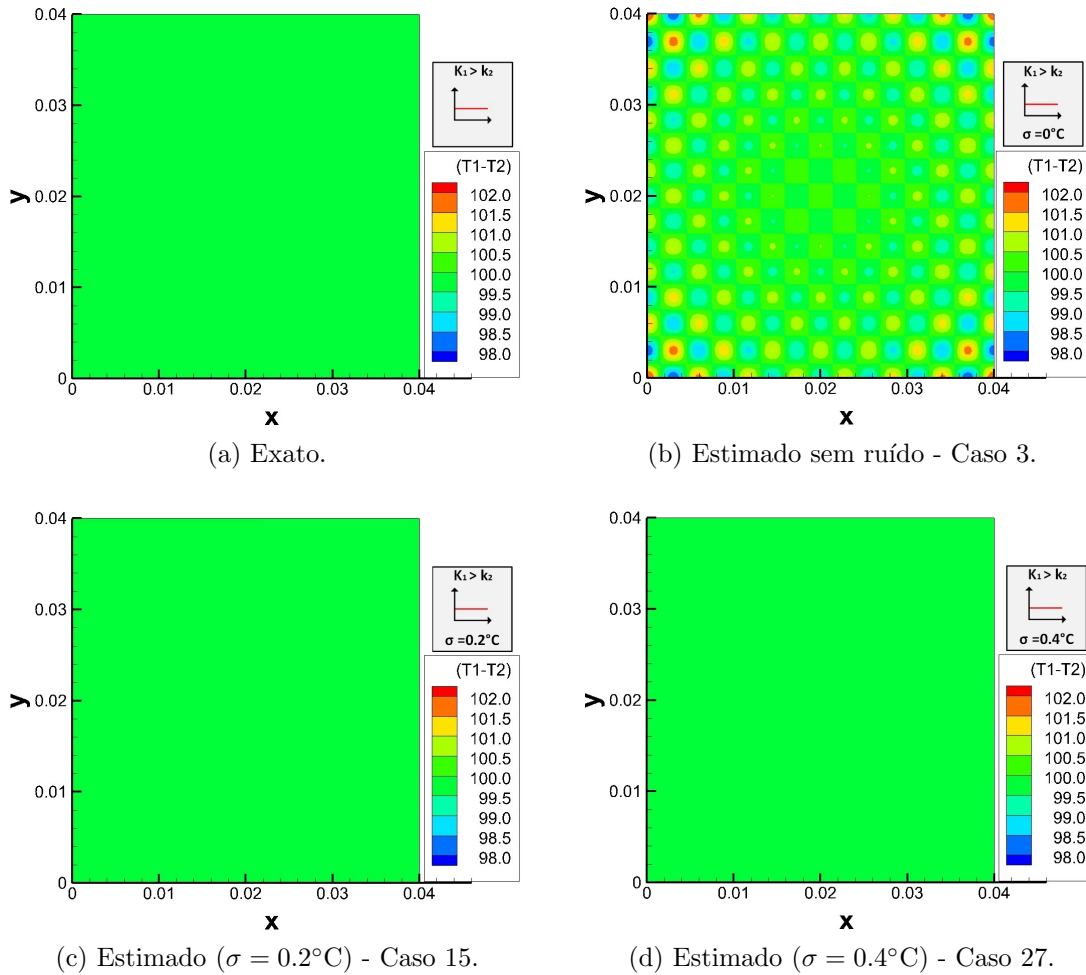


Figura 5.38: Salto de Temperatura ( $^\circ\text{C}$ ) - Perfil 1 - Configuração 3.

A figura 5.39 apresenta o fluxo de calor exato na interface e as estimativas realizadas sem e com ruído nas medidas. A estimativa sem ruído, isto é, caso 3 (ver figura 5.39b), também apresenta uma maior oscilação ao redor do valor exato, assim como na estimativa do salto de temperatura. As figuras 5.39c e 5.39d apresentam



as estimativas dos casos 15 e 27, respectivamente. Novamente, as estimativas foram suavizadas e estão em boa concordância com o fluxo de calor exato.

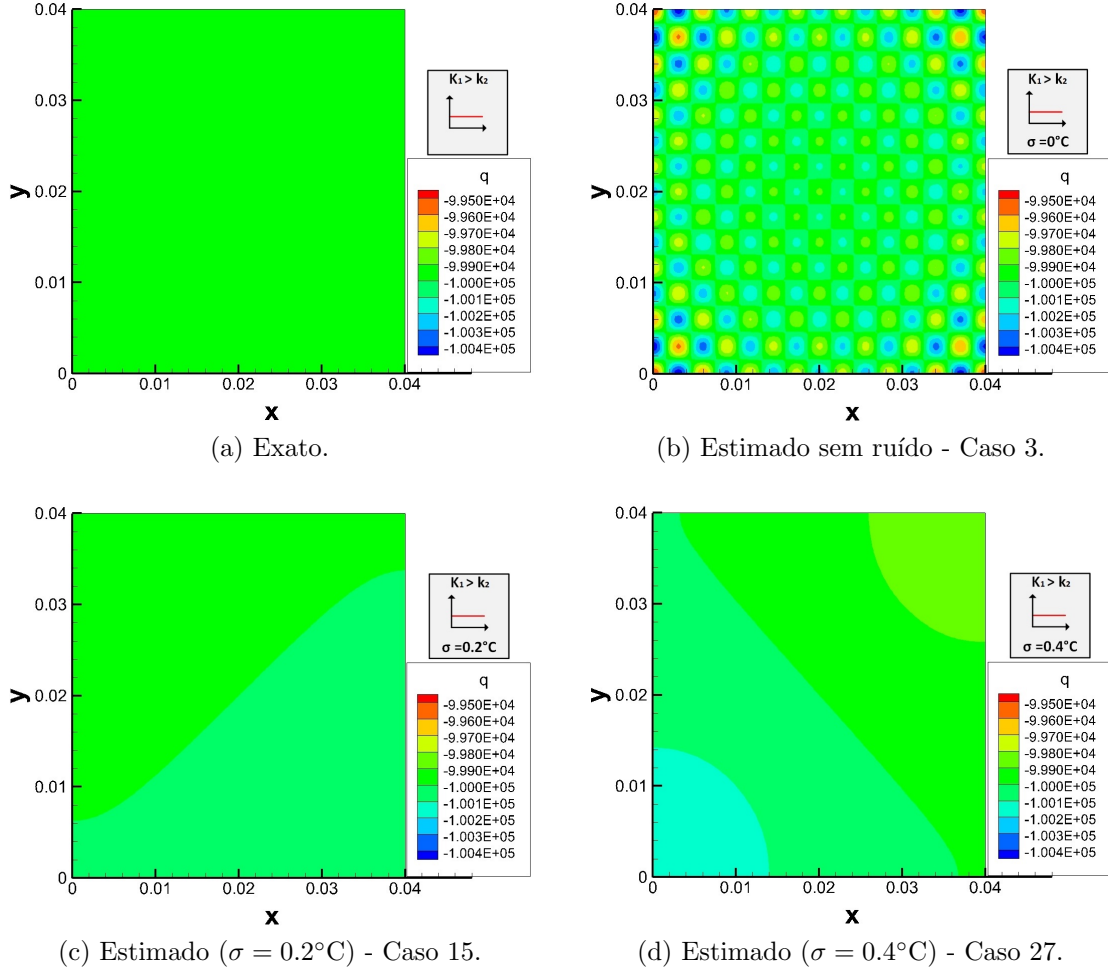


Figura 5.39: Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 1 - Configuração 3.

Por fim, pode-se realizar a estimativa da condutância térmica de contato. A figura 5.40 apresenta a condutância térmica de contato exata. A figura 5.40b apresenta a estimativa para o caso sem ruído nas medidas, isto é, para o caso 3. Note que a amplitude da oscilação neste caso é bem maior do que no caso 2 (ver figura 5.36b). Essa piora da estimativa ao trocar a ordem dos materiais, se deve ao fato do material superior ter condutividade térmica maior do que o material inferior, o que dificulta a estimativa.

As figuras 5.40c e 5.40d apresentam as estimativas nos casos 15 e 27, respectivamente. Em ambos os casos, as oscilações foram suavizadas e as estimativas estão em ótima concordância com o exato, até mesmo no caso com desvio-padrão  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ , isto é, no caso 27.

As figuras 5.41a e 5.41b apresentam o resíduo nos casos 15 e 27, respectivamente. Novamente, observa-se o mesmo comportamento encontrado na figura 5.32.

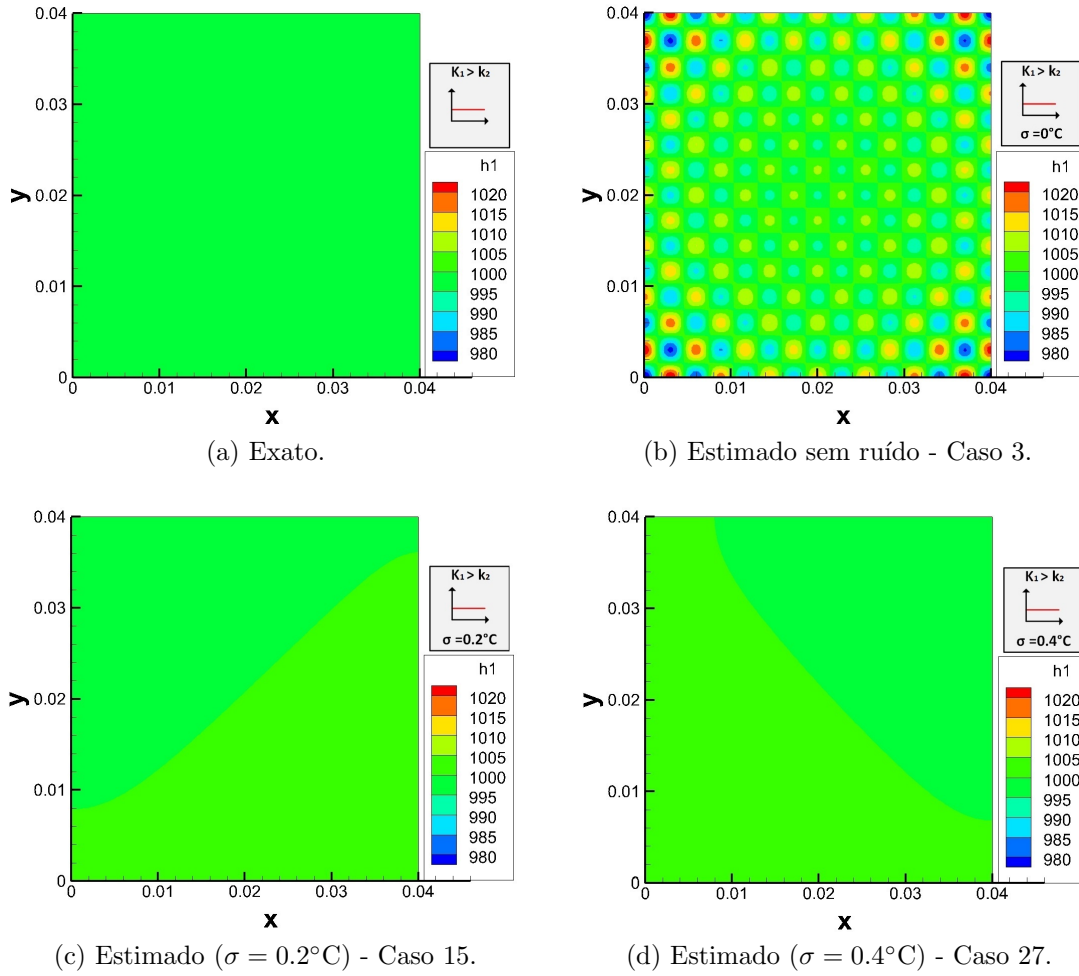


Figura 5.40: Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 1 - Configuração 3.

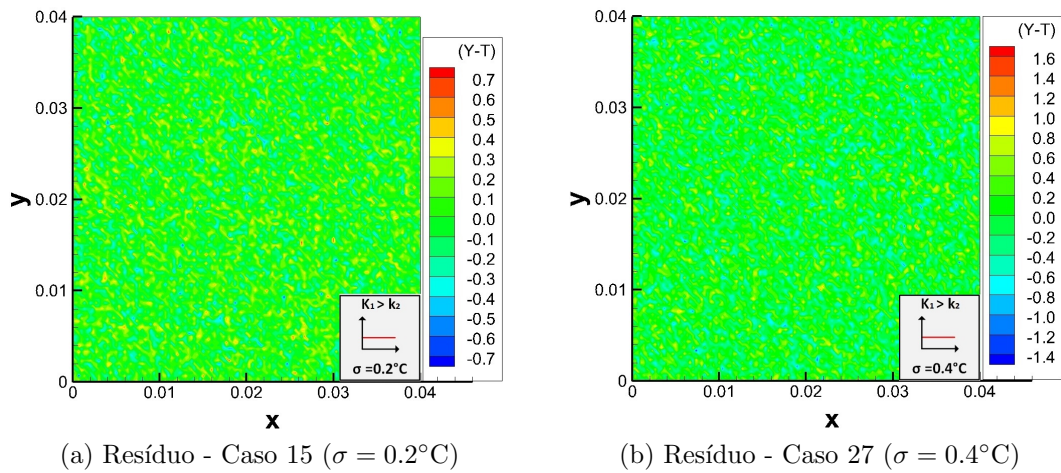


Figura 5.41: Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 1 - Configuração 3.

### Estimativa do Perfil 2 - Dois materiais iguais (configuração 1)

Nesta seção serão analisados os casos com perfil 2 e configuração 1, isto é, perfil com uma descontinuidade no centro e usando dois materiais iguais. Os casos corres-

pondentes a este perfil e a esta configuração são os casos 4, 16 e 28 (ver tabela 5.4), que são os casos sem ruído, com ruído com desvio-padrão  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$  e com ruído com desvio-padrão  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ , respectivamente.

A figura 5.42a mostra o salto de temperatura exato para o perfil 2 e configuração 1. A estimativa sem ruído nas medidas é apresentada na figura 5.42b e, como pode ser observado, está em ótima concordância com o exato. Incluindo ruído nas medidas, têm-se os casos 16 e 28, apresentados nas figuras 5.42c e 5.42d, respectivamente. Pode-se notar que as estimativas recuperam bem o salto de temperatura, mesmo com o aumento do ruído nas medidas.

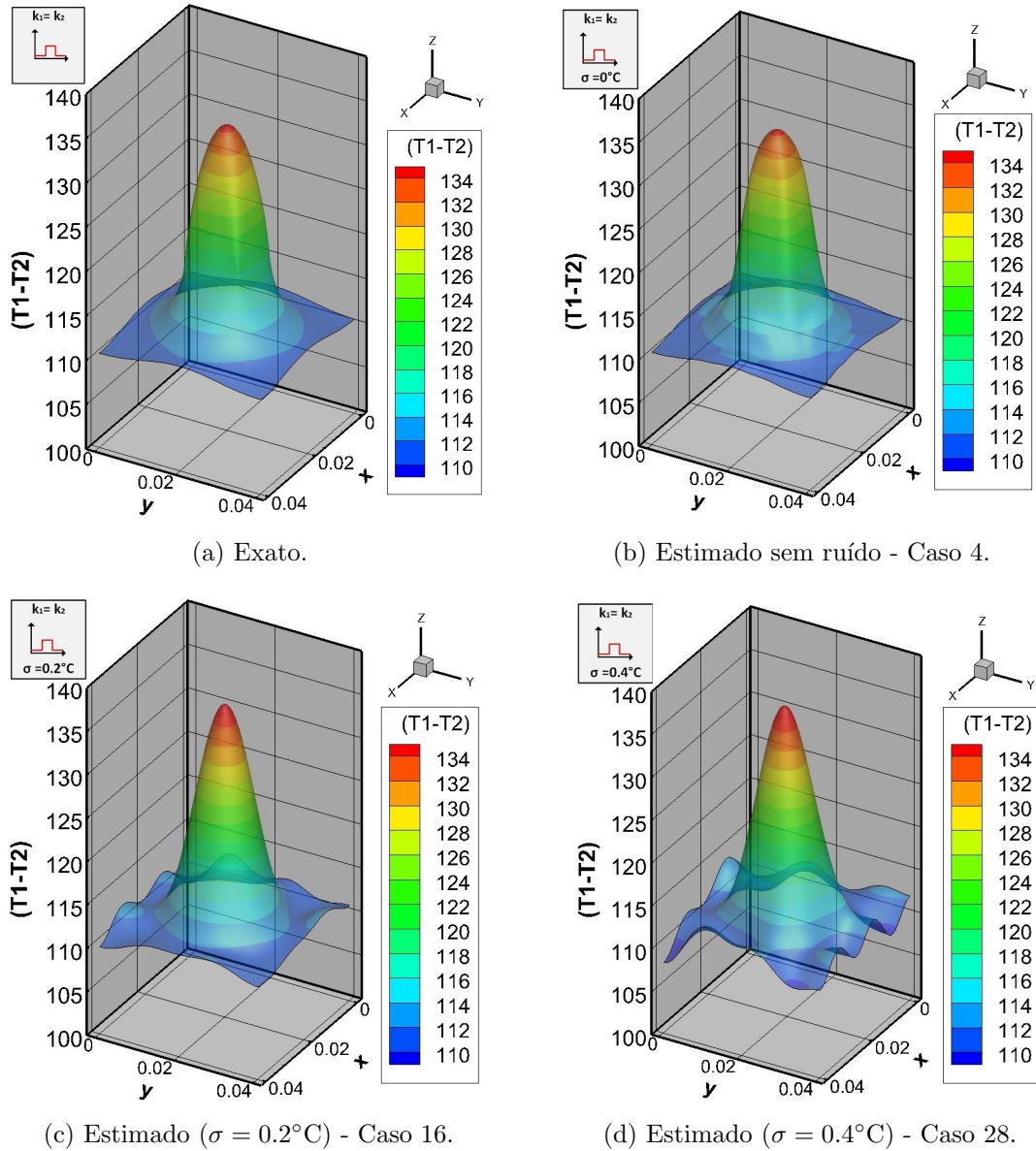
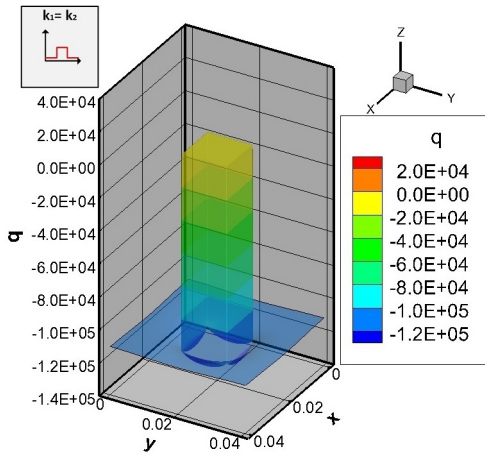
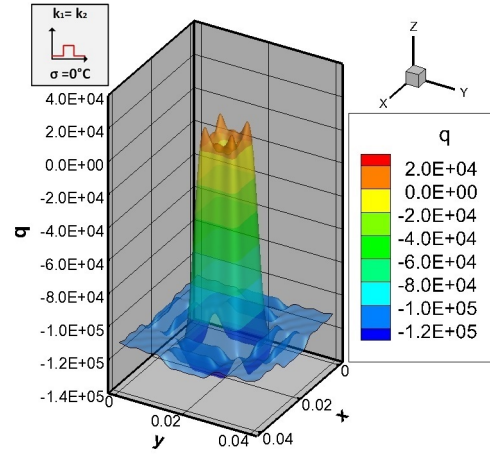


Figura 5.42: Salto de Temperatura ( $^\circ\text{C}$ ) - Perfil 2 - Configuração 1.

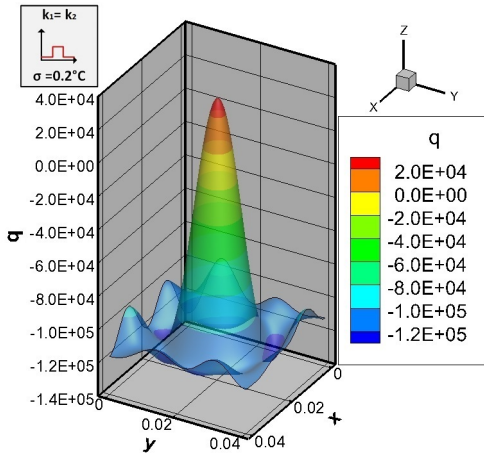
A figura 5.43 mostra o fluxo de calor exato para o perfil 2 e configuração 1, assim como as estimativas com e sem ruído nas medidas. Como pode ser observado na figura 5.43a, o fluxo de calor possui uma descontinuidade, o que dificulta a sua estimativa. A figura 5.43b mostra a estimativa sem ruído, isto é, caso 4. Nota-se que mesmo com as oscilações próximo à descontinuidade, a estimativa está em ótima concordância com o perfil exato. Incluindo ruído nas medidas, tem-se os casos 16 e 28, apresentados nas figuras 5.43c e 5.43d, respectivamente. Pode-se notar que as estimativas recuperam a localização da descontinuidade e atingem o valor máximo do fluxo de calor mas não conseguem capturar perfeitamente o comportamento deste perfil. Como este perfil é descontínuo, considera-se que as estimativas estão em boa concordância com o exato.



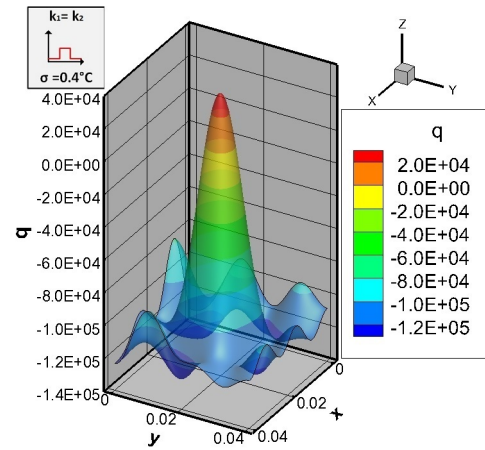
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 4.



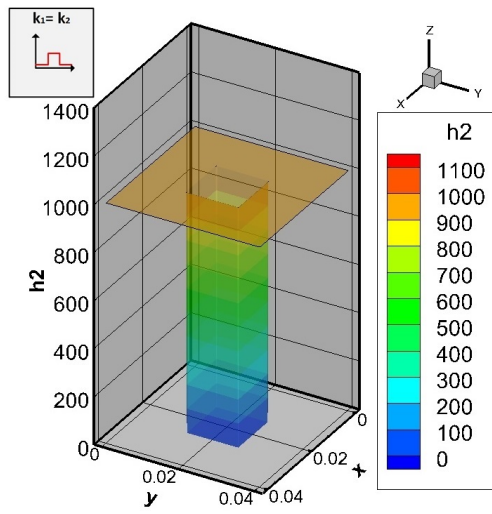
(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ) - Caso 16.



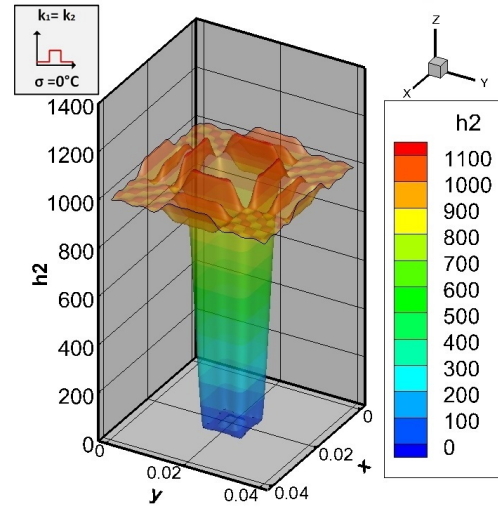
(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) - Caso 28.

Figura 5.43: Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 2 - Configuração 1.

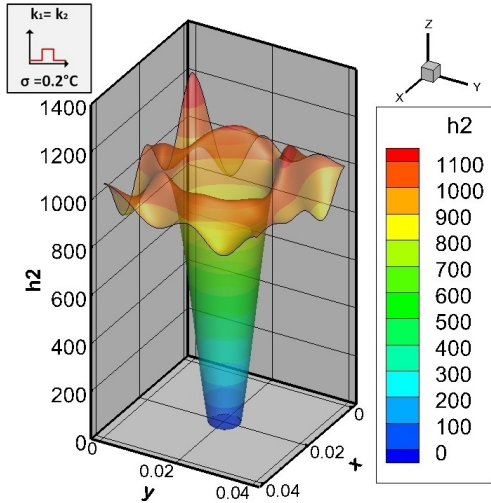
Por fim, têm-se as estimativas da condutância térmica de contato para o perfil 2 e configuração 1, como podemos ver na figura 5.44. A figura 5.44a apresenta o perfil exato da condutância térmica de contato. A estimativa sem ruído nas medidas está em ótima concordância com o exato. O método foi capaz de identificar a descontinuidade, como pode ser visto na figura 5.44b. Acrescentando ruído nas medidas, as estimativas pioram (ver figuras 5.44c e 5.44d) mas, ainda assim, é possível identificar o local da descontinuidade. Devido à dificuldade de estimar perfis descontínuos, esta estimativa pode ser considerada em boa concordância com o perfil exato.



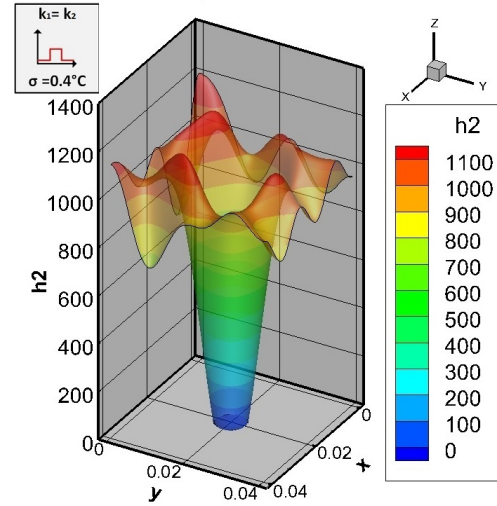
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 4.



(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ) - Caso 16.



(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) - Caso 28.

Figura 5.44: Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 2 - Configuração 1.



A figura 5.45 apresenta o resíduo para os casos 16 e 28. Pode-se notar que o resíduo é mais alto no local da descontinuidade da condutância térmica de contato. O método é capaz de identificar a localização mas não recupera perfeitamente o perfil, o que pode ser a causa para estes valores altos nos resíduos em ambos os casos. Note que o resíduo não é simétrico em torno do zero. Isso pode ser explicado pelo fato das estimativas serem truncadas no zero, isto é, caso a estimativa da condutância térmica de contato possua um valor negativo, automaticamente este valor é convertido para zero, uma vez que fisicamente não há condutância térmica de contato negativa.

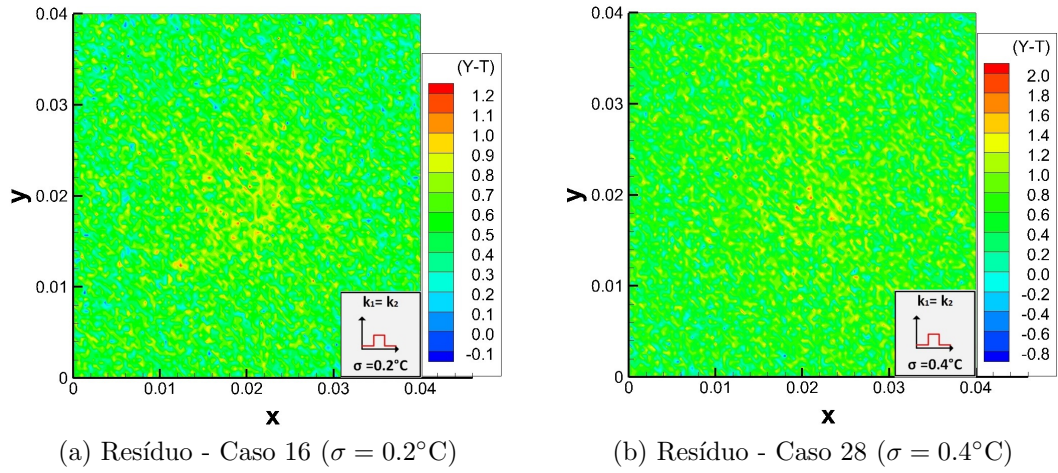
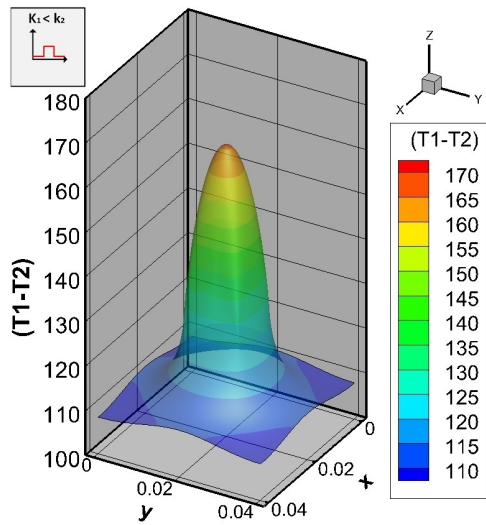


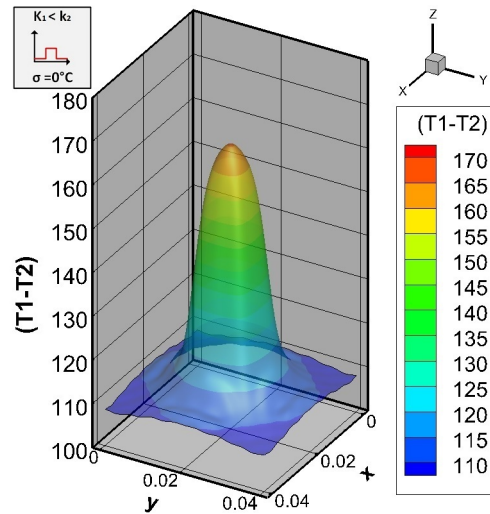
Figura 5.45: Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 2 - Configuração 1.

## Estimativa do Perfil 2 - Dois materiais diferentes (configuração 2)

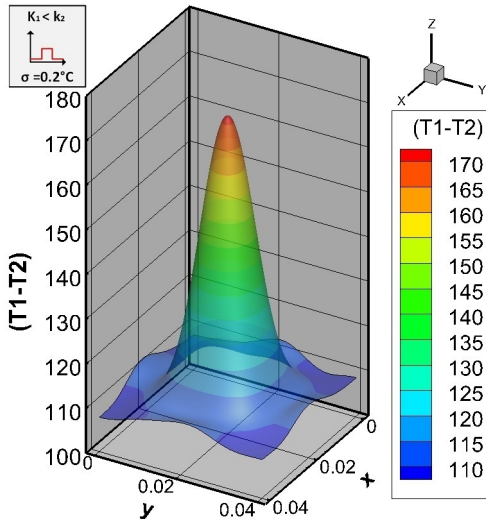
A figura 5.46 mostra o salto de temperatura exato e estimado sem/com ruído para o perfil 2 e com a configuração 2. Para o caso sem ruídos nas medidas, isto é, caso 5 (ver figura 5.46b), a estimativa está em ótima concordância com o perfil exato (ver figura 5.46a). Para os casos com ruído, isto é, casos 17 e 29 (ver figuras 5.46c e 5.46d), as estimativas conseguem identificar o perfil e o valor máximo do salto de temperatura mostrando uma boa concordância com o perfil exato. Esse comportamento também foi observado na configuração 1.



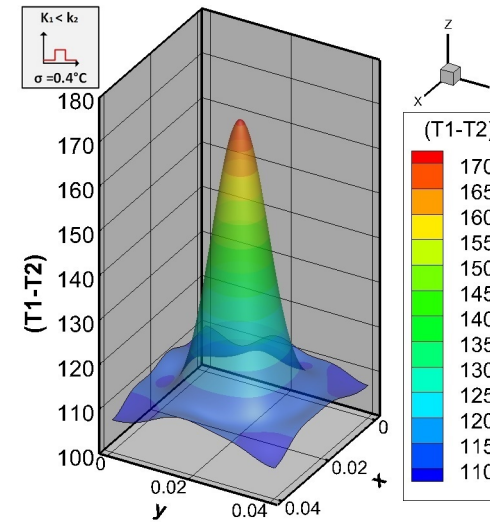
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 5.



(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ) - Caso 17.



(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) - Caso 29.

Figura 5.46: Salto de Temperatura ( $^\circ\text{C}$ ) - Perfil 2 - Configuração 2.

A figura 5.47a apresenta o perfil exato do fluxo de calor na interface do perfil 2 com a configuração 2. O fluxo de calor no caso 5 é bem estimado como pode ser visto na figura 5.47b. Já os casos com ruído, isto é, casos 17 e 29, são apresentados nas figuras 5.47c e 5.47d, respectivamente. Pode-se notar que a estimativa com desvio-padrão  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$  possui um valor máximo bem maior que o caso com  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ , o que pode ser explicado pela escolha do parâmetro de truncamento, uma vez que este parâmetro tem forte influência na qualidade da estimativa.

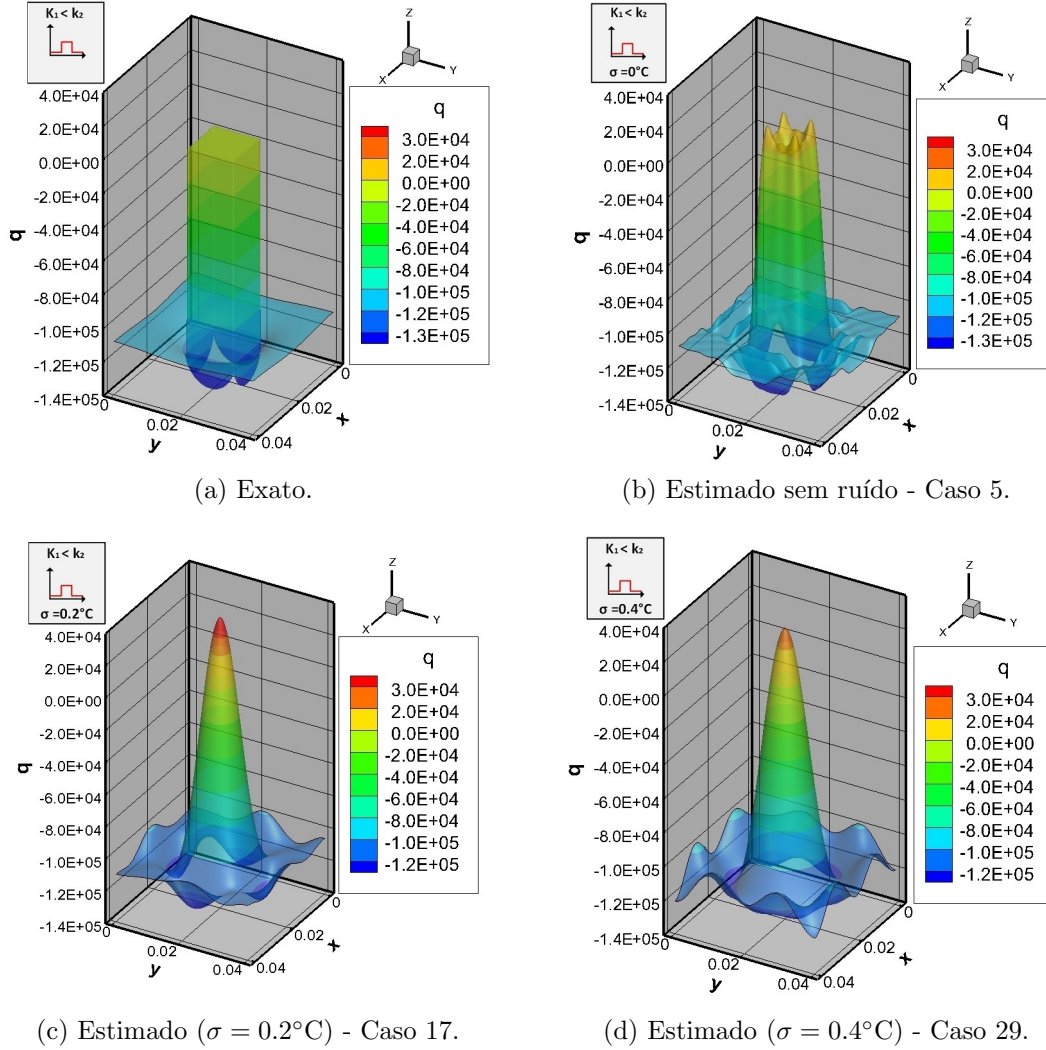


Figura 5.47: Fluxo de calor ( $\text{W/m}^2$ ) - Perfil 2 - Configuração 2.



A figura 5.48 apresenta condutância térmica de contato exata para o perfil 2 e configuração 2, assim como as estimativas com e sem ruído, que são os casos 5, 17 e 29. O comportamento é o mesmo apresentado na configuração 2, isto é, para o caso sem ruído, a estimativa fica muito próxima da exata. Ao acrescentar o ruído, as estimativas ainda conseguem recuperar a localização da descontinuidade.

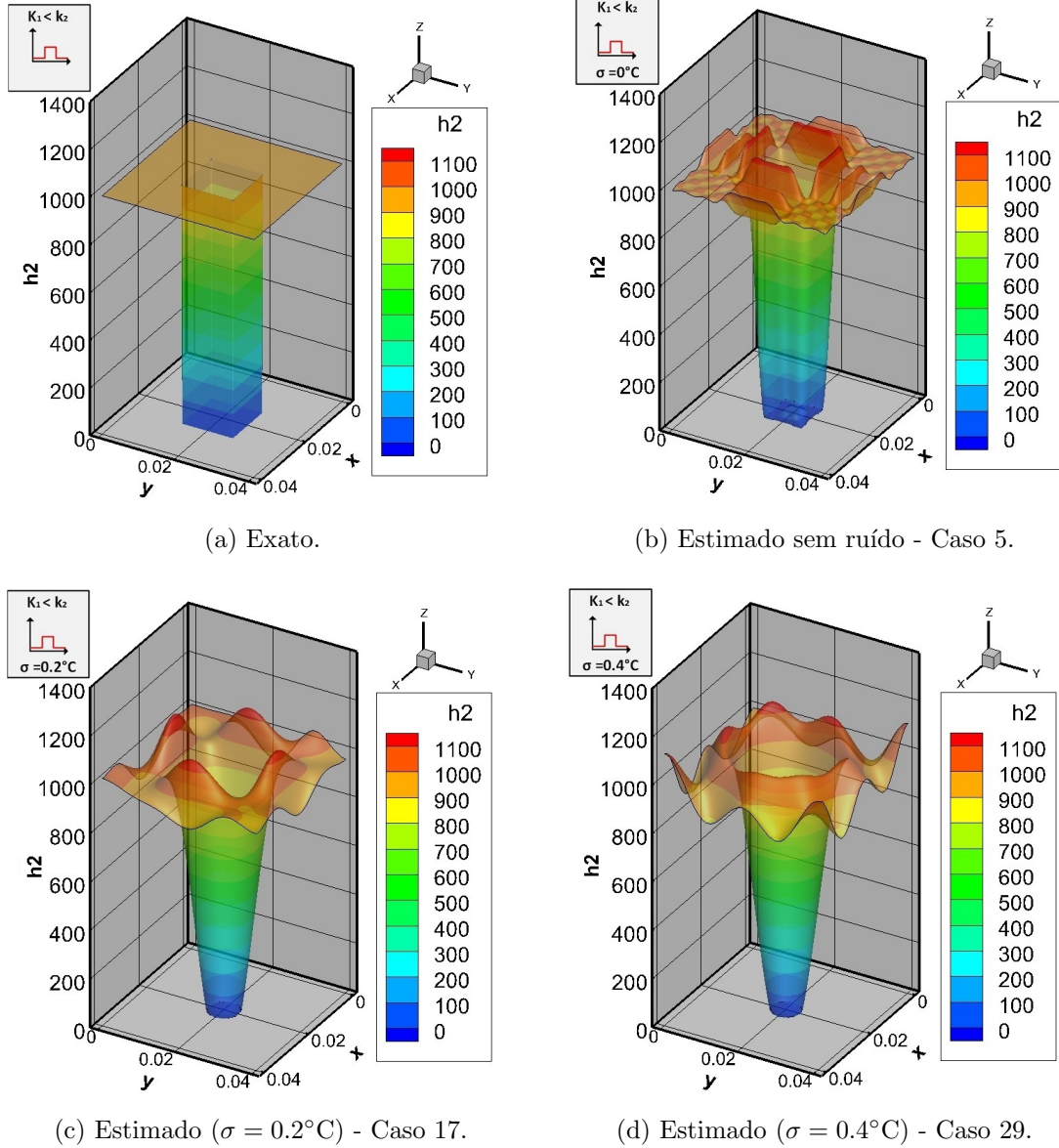
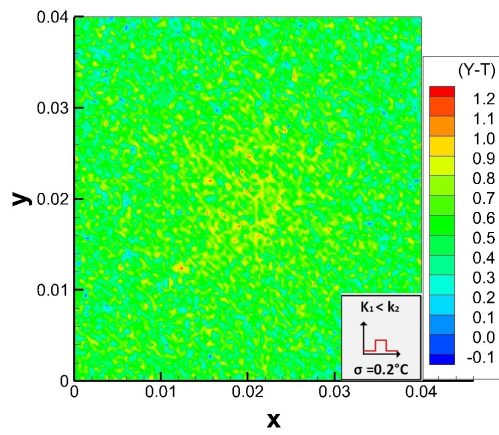
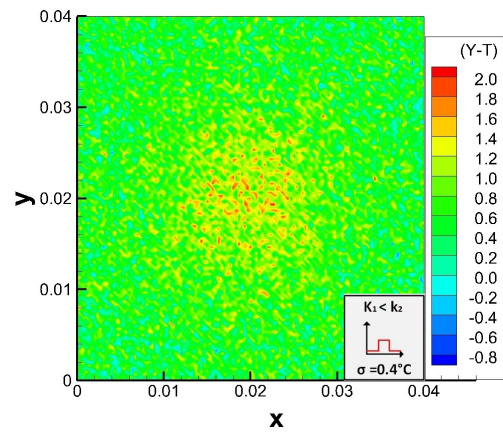


Figura 5.48: Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 2 - Configuração 2.

A figura 5.49 apresenta o resíduo para os casos 17 e 29. Novamente, podemos notar que, o resíduo não é simétrico em torno do zero e é mais alto no local da descontinuidade.



(a) Resíduo - Caso 17 ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ )

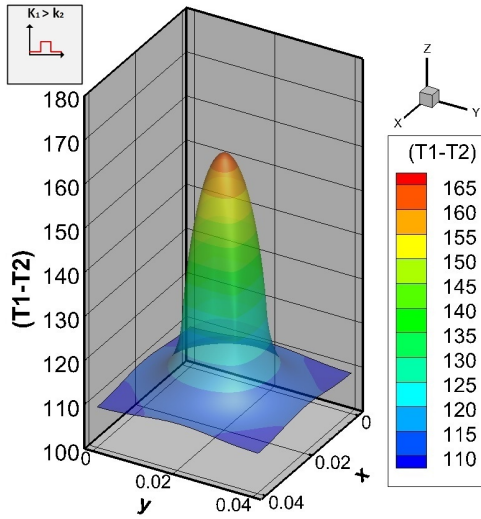


(b) Resíduo - Caso 29 ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ )

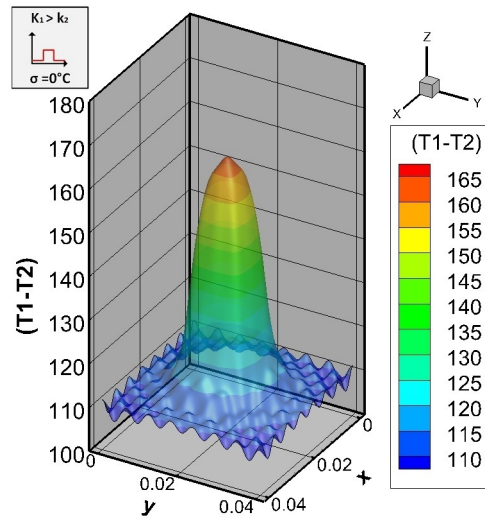
Figura 5.49: Resíduo  $(Y - T)$  - Perfil 2 - Configuração 2.

## Estimativa do Perfil 2 - Dois materiais diferentes (configuração 3)

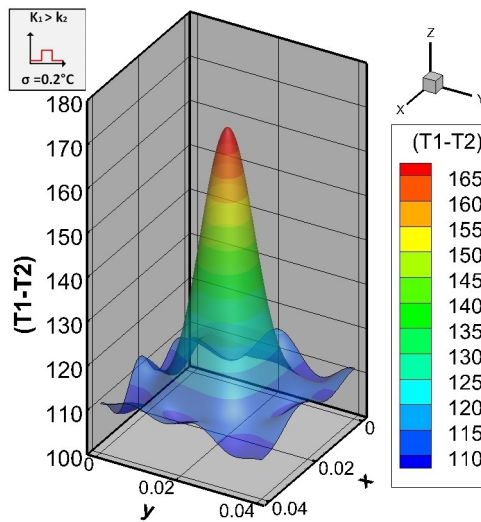
Ainda utilizando o perfil 2, mas mudando a ordem dos materiais, as estimativas apresentam um comportamento parecido com o que foi observado nas configurações 1 e 2 para este mesmo perfil. Note que, novamente, para o caso sem ruídos nas medidas, isto é, caso 6 (ver figura 5.50b), a estimativa está em ótima concordância com o exato (ver figura 5.50a). A única diferença é uma maior oscilação na base da estimativa, o que não foi observado nas configurações anteriores. Para os casos com ruído, isto é, casos 18 e 30 (ver figuras 5.50c e 5.50d), as estimativas conseguem identificar o perfil e o valor máximo do salto de temperatura mostrando uma boa concordância com o perfil exato. Esse comportamento também foi observado nas configurações 1 e 2.



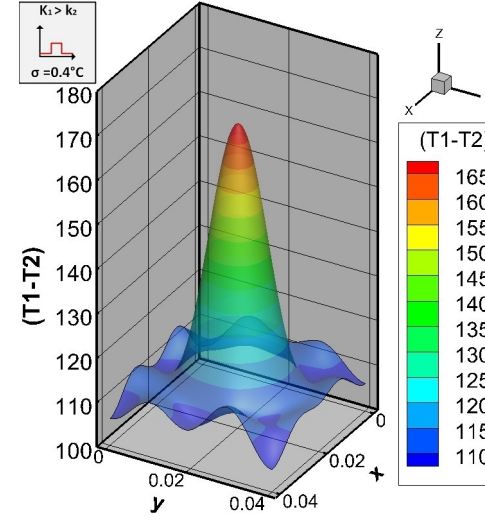
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 6.



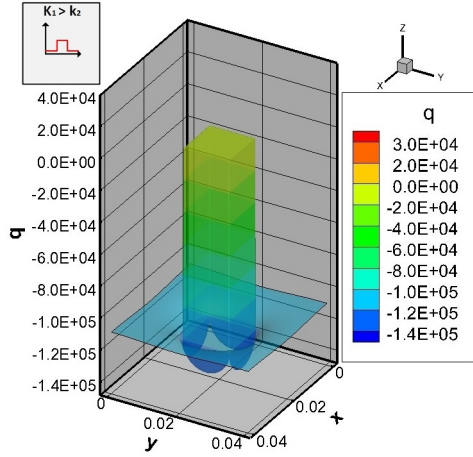
(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ) - Caso 18



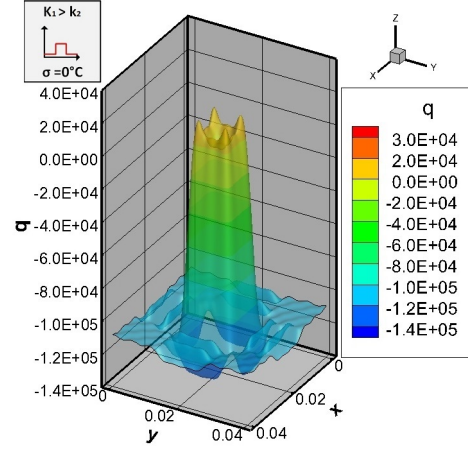
(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) - Caso 30

Figura 5.50: Salto de Temperatura ( $^\circ\text{C}$ ) - Perfil 2 - Configuração 3.

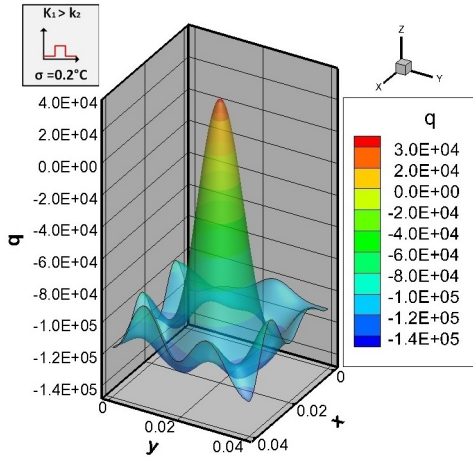
A figura 5.51 apresenta o fluxo de calor exato com perfil 2 e configuração 3, assim como, as estimativas sem e com ruídos, isto é, os casos 6, 18 e 30, respectivamente. Pode-se notar comportamentos parecidos com os apresentados nas configurações anteriores, como pode ser visto nas figuras 5.43 e 5.47.



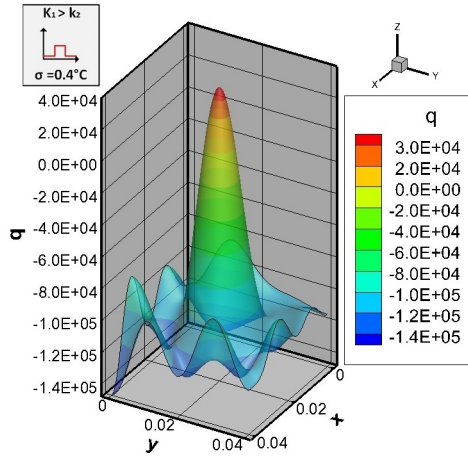
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 6.



(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ) - Caso 18.



(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) - Caso 30.

Figura 5.51: Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 2 - Configuração 3.

A figura 5.52 apresenta a condutância térmica de contato com perfil 2 e configuração 3, assim como as estimativas sem e com ruído, isto é, os casos 6, 18 e 30, respectivamente. Pode-se notar que a estimativa sem ruído está em ótima concordância com o exato, apesar de apresentar oscilações um pouco maiores em torno do valor máximo da condutância térmica de contato quando comparada com as outras configurações (ver figuras 5.44 e 5.48). Já as estimativas com ruído conseguem recuperar a descontinuidade mas apresentam oscilações bem maiores do que as oscilações apresentadas nas configurações 1 e 2, como também pode ser visto nas figuras 5.44, 5.48.

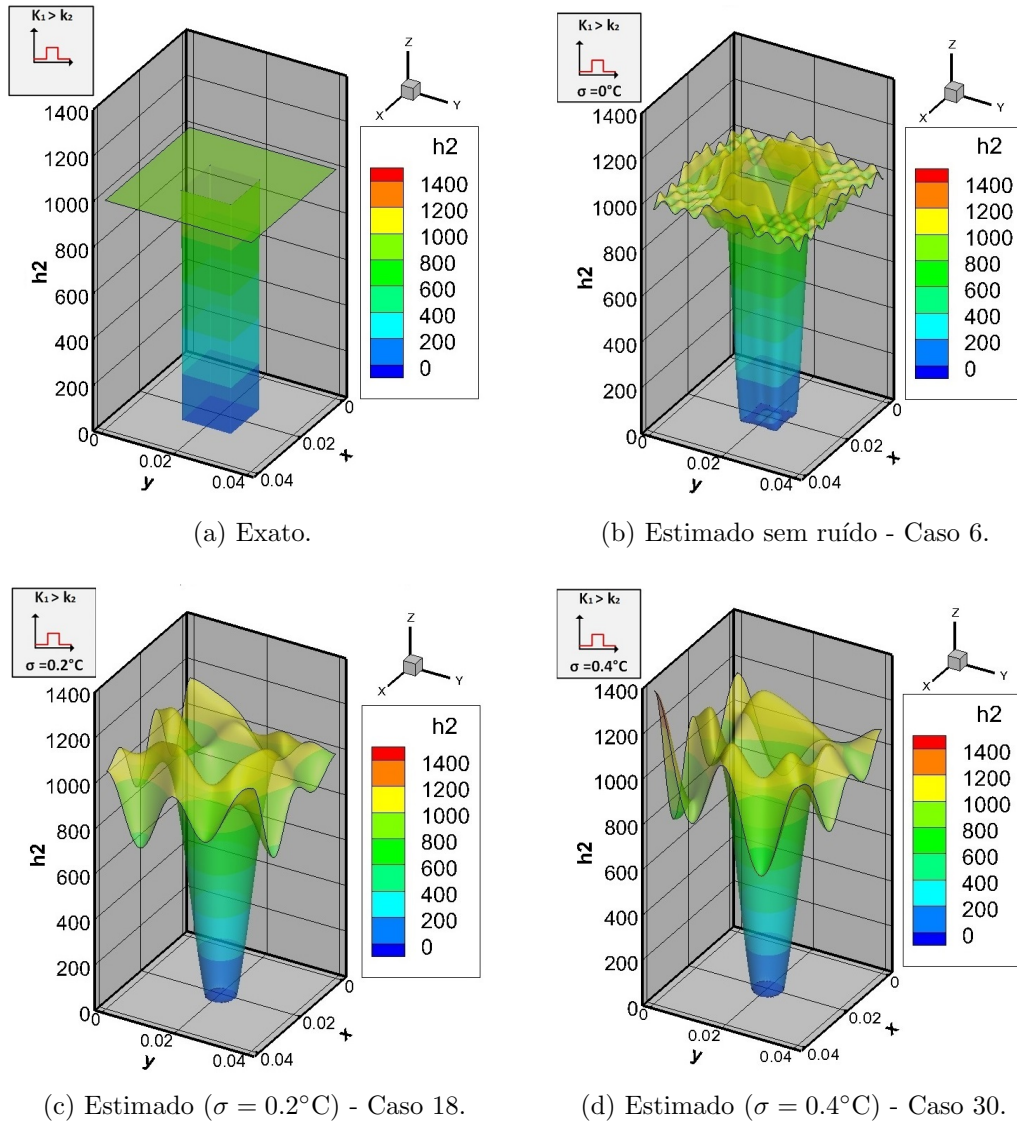


Figura 5.52: Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 2 - Configuração 3.



A figura 5.53 apresenta o resíduo para os casos 18 e 30. Novamente, podemos notar o mesmo comportamento apresentados nas configurações 1 e 2, como pode ser visto nas figuras 5.45 e 5.49.

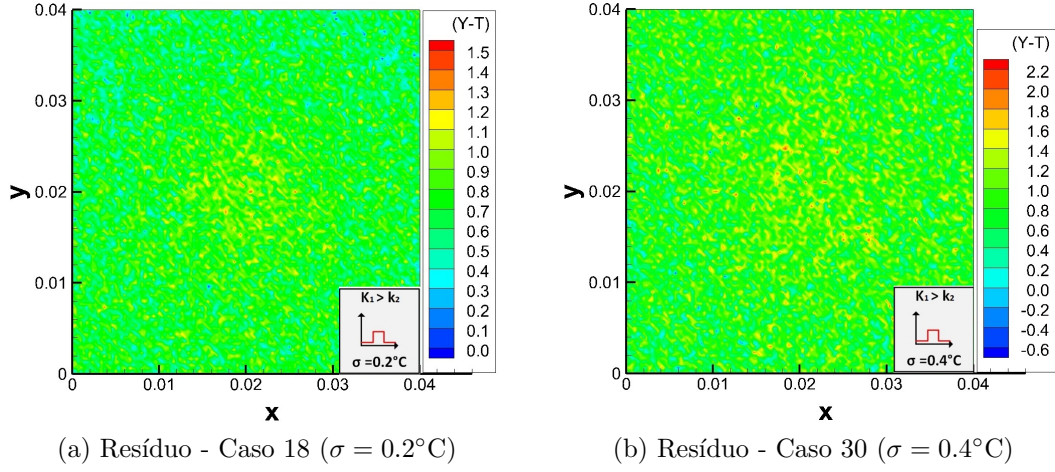


Figura 5.53: Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 2 - Configuração 3.

Os resultados obtidos para os perfis 3 e 4, com as diferentes configurações de materiais e níveis de ruído, estão apresentados no apêndice B.

Analisando todos os casos estudados, inclusive os que estão no apêndice B, pode-se observar que:

- Todas as estimativas que não consideram ruído nas medidas estão em ótima concordância com o perfil exato, até mesmo para os casos com perfis descontínuos;
- As oscilações presentes nas estimativas são devido ao uso da base de Fourier nos problemas auxiliares. Como esta base é formada por senos e cossenos, há a inserção deste caráter oscilatório nas estimativas;
- Ao acrescentar ruído nas medidas, as estimativas ficam suavizadas e diminui-se a oscilação. Isto ocorre devido a escolha proposta nesta tese para o parâmetro de truncamento do método TSVD;
- A escolha do parâmetro de truncamento do método TSVD interfere na qualidade das estimativas com ruídos nas medidas;
- Apesar dos casos descontínuos não serem perfeitamente estimados quando há a inclusão de ruído nas medidas, os resultados obtidos representam um avanço em relação aos resultados tipicamente encontrados na literatura, onde encontra-se, na grande maioria, estimativas globais ou experimentais.
- Além do que foi explicado no item anterior, apesar das estimativas com perfis descontínuos não ficarem muito próximas do perfil exato com o acréscimo de ruídos, pode-se observar que em todos os casos foi possível identificar a localização da descontinuidade;
- Observou-se que as estimativas de perfis suaves e com magnitude menor são melhores. O aumento do número de descontinuidades dificulta as estimativas como foi observado nos casos com o perfil 3.
- Observou-se que os resultados pioram quando se utiliza a configuração 3 dos materiais. Isto pode ser explicado pelo fato do material superior ter condutividade térmica maior que o material inferior nesta configuração.

A tabela 5.7 apresenta o tempo computacional para todos os casos estudados. Note que cada estimativa demora até 6.30 segundos, que é um tempo baixíssimo para uma estimativa bidimensional. Deve-se ressaltar que este tempo é somente do pós-processamento. Não está computado o tempo de solução dos problemas auxiliares e nem da montagem da matriz, que são os mesmos em cada configuração.

Tabela 5.7: Tempo Computacional

<b>Tempo Computacional (segundos)</b>	
<b>Caso 1</b>	2.04
<b>Caso 2</b>	5.25
<b>Caso 3</b>	5.38
<b>Caso 4</b>	2.04
<b>Caso 5</b>	1.93
<b>Caso 6</b>	1.91
<b>Caso 7</b>	4.21
<b>Caso 8</b>	2.97
<b>Caso 9</b>	2.95
<b>Caso 10</b>	2.03
<b>Caso 11</b>	6.28
<b>Caso 12</b>	1.94
<b>Caso 13</b>	1.38
<b>Caso 14</b>	1.93
<b>Caso 15</b>	1.92
<b>Caso 16</b>	4.29
<b>Caso 17</b>	2.98
<b>Caso 18</b>	1.92
<b>Caso 19</b>	4.23
<b>Caso 20</b>	5.44
<b>Caso 21</b>	5.38
<b>Caso 22</b>	2.08
<b>Caso 23</b>	5.47
<b>Caso 24</b>	5.37
<b>Caso 25</b>	2.06
<b>Caso 26</b>	5.49
<b>Caso 27</b>	5.66
<b>Caso 28</b>	1.38
<b>Caso 29</b>	6.06
<b>Caso 30</b>	3.02
<b>Caso 31</b>	4.22
<b>Caso 32</b>	2.98
<b>Caso 33</b>	5.68
<b>Caso 34</b>	3.41
<b>Caso 35</b>	1.92
<b>Caso 36</b>	2.99



## Caso Experimental

Medições de temperatura experimentais foram utilizadas para validar a metodologia apresentada. Estas medidas foram obtidas através de um experimento realizado por ABREU [2], que utilizou uma técnica não intrusiva - termografia por infravermelho. Neste experimento, a amostra de material foi submetida a um sistema de aquecimento e as medidas de temperatura foram realizadas na superfície superior externa do material através de uma câmera infravermelha (FLIR SC-660) em intervalos predeterminados, até chegar ao tempo final do experimento. ABREU [2] quantificou e qualificou falhas entre materiais compostos, através da identificação da condutância térmica de contato na interface entre os dois materiais. Para a identificação da condutância térmica de contato, utilizou o Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov e também a metodologia baseada no Funcional de Reciprocidade. Porém, com este segundo método, só estimou perfis unidimensionais. A figura 5.54 apresenta o aparato experimental desenvolvido, onde:

- a) Câmera termográfica;
- b) Suporte vertical para a câmera;
- c) Sistema de aquecimento;
- d) Amostras;
- e) Suporte de amostras;
- f) Sistema de aquisição de dados;
- g) Microcomputador para aquisição e tratamento dos dados;
- h) Proteção de acrílico.

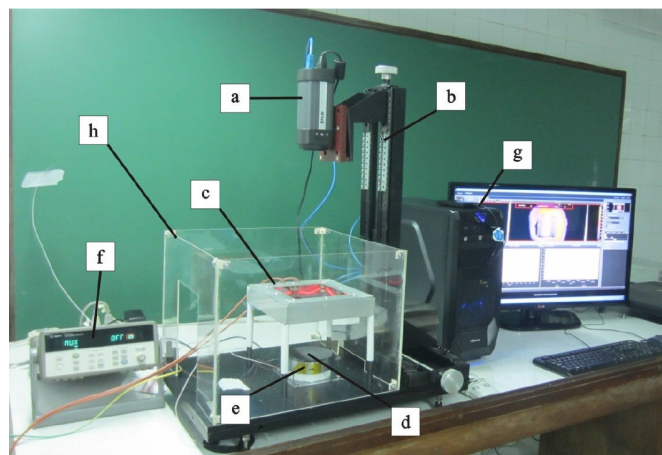


Figura 5.54: Aparato experimental (figura cedida por ABREU [2]).

A descrição detalhada do procedimento experimental pode ser encontrada em ABREU [2].

A amostra utilizada no experimento representa um meio composto de duas camadas com as seguintes dimensões: a largura e o comprimento são iguais a 0.04 m (ou seja,  $a = b = 0.04$  m) e a altura de cada camada é igual a 0.002 m (ou seja,  $c_t = 0.004$  m). Entre as camadas há uma falha medindo 0.015m, com profundidade entre 100 e 500  $\mu\text{m}$ , como pode ser visto na figura 5.55.

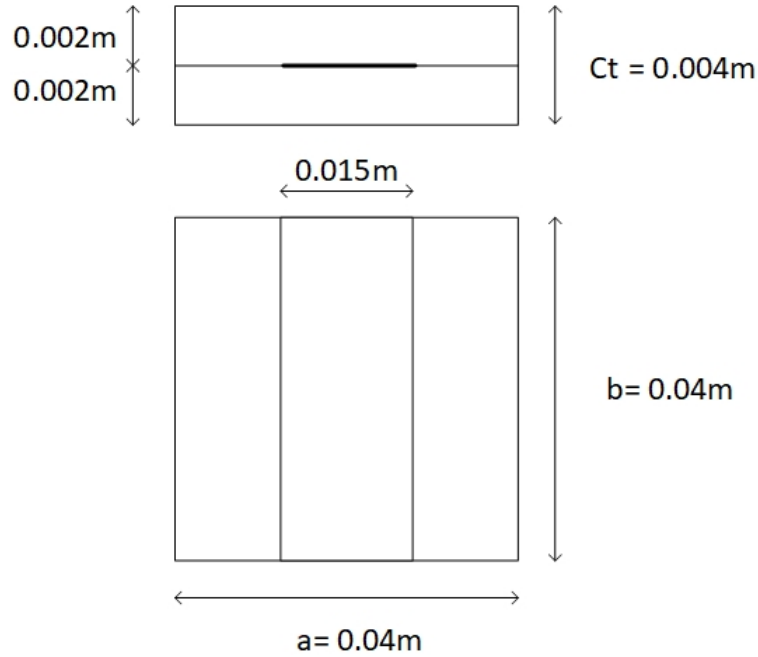


Figura 5.55: Esboço da amostra de polimetilmetacrilato (PMMA).

O material utilizado nas amostras foi polimetilmetacrilato ( $\kappa_1 = \kappa_2 = 0.22\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ ) e um fluxo de calor igual a  $q = -3420\text{W}/\text{m}^2$  foi aplicado na superfície superior da amostra onde as medidas de temperatura foram tomadas.

Neste trabalho, estas medidas experimentais foram utilizadas para estimar a condutância térmica de contato bidimensional em regime permanente através da abordagem 1, apresentada na seção 5.1. Ao utilizar medidas reais de temperatura, existem incertezas inerentes ao aparato utilizado para realizar as medições. Por este motivo, o método TSVD foi utilizado para resolver os sistemas lineares resultantes da aplicação do método do Funcional de Reciprocidade. Ao realizar uma análise dos valores singulares, como nos casos numéricos anteriores, foi encontrado como o melhor parâmetro de truncamento, para o salto de temperatura, o valor de  $2.5 \times 10^3$ . Para o sistema referente ao fluxo de calor na interface, foi encontrado o valor de  $9 \times 10^{-1}$ .

A figura 5.56a mostra a estimativa da condutância térmica de contato obtida usando a metodologia descrita neste trabalho e a figura 5.56b apresenta estimativa da

condutância térmica de contato obtida por ABREU [2] usando um Método Bayesiano - Método de Monte Carlo com Cadeias de Markov (MCMC). Em ABREU [2] as variáveis são apresentadas de forma adimensional e foram transformadas em forma dimensional através das relações apresentadas nas Eqs. (5.7), (5.8) e (5.9), para permitir sua comparação com os resultados obtidos neste trabalho.

$$x = Xc_t \quad (5.7)$$

$$y = Yc_t \quad (5.8)$$

$$h = \frac{\kappa Bi}{c_t} \quad (5.9)$$

onde  $X$  e  $Y$  são as direções adimensionais,  $Bi$  é o Número Biot,  $\kappa$  é a condutividade térmica e  $c_t$  é a altura total da amostra.

Ao comparar as figuras 5.56a e 5.56b, pode-se observar que ambos os métodos identificam com sucesso a falha, apesar de algumas diferenças numéricas entre as estimativas. Essa diferença é maior na região onde a condutância térmica de contato é menor. No entanto, deve-se notar que os resultados obtidos com o Funcional de Reciprocidade são mais suaves, devido à regularização obtida através da escolha do parâmetro de truncamento ideal.

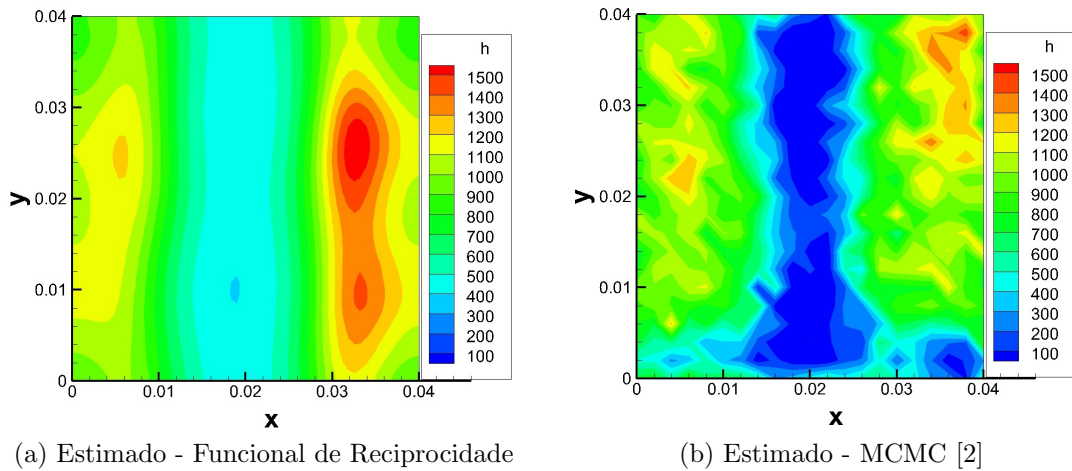


Figura 5.56: Caso Experimental

Com relação ao tempo computacional, o método descrito neste trabalho levou 1.61 segundos para realizar a estimativa, considerando que a escolha do parâmetro de truncamento já tinha sido realizada e que os problemas auxiliares já haviam sido resolvidos. A estimativa utilizando o método MCMC [2] leva aproximadamente 2 horas. Esta comparação mostra a redução extrema no tempo computacional ao

utilizar o método do Funcional de Reciprocidade.

Foi realizado o cálculo do resíduo através da Eq. (5.6), onde  $Y$  é a temperatura medida e  $T$  é a temperatura estimada, ambas em  $\Gamma_0$ . A figura 5.57 apresenta o resíduo para o caso estimado com o funcional de reciprocidade, isto é, o resíduo referente à estimativa 5.56a. Nota-se que os resíduos são baixos mostrando a qualidade do resultado. Não foi possível realizar o cálculo do resíduo da estimativa com o método MCMC por não se ter acesso ao campo de temperatura estimada com este método.

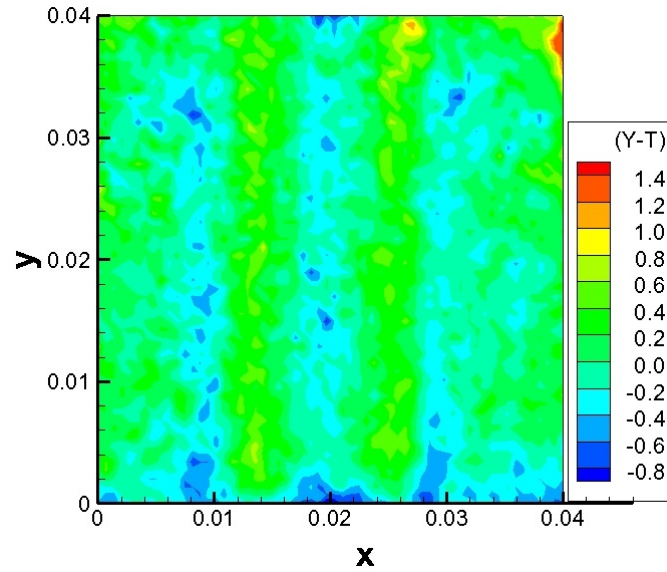


Figura 5.57: Resíduo  $(Y - T)$  - Funcional de Reciprocidade

## 5.2 Abordagem 2

Na abordagem 2 foi estudado um problema de transferência de calor tridimensional em regime transiente com perfil de condutância térmica de contato bidimensional sem variação no tempo. A formulação matemática do problema físico foi apresentada no capítulo 3.

Para isso, foi considerado o contato entre dois materiais iguais, isto é, configuração 1 (ver tabela 5.8). Nesta abordagem foram utilizados os perfis 7 e 8 apresentados na tabela 3.3 e na figura 3.8, que são reproduzidas abaixo, por questão de conveniência (ver tabela 5.9 e figura 5.58).

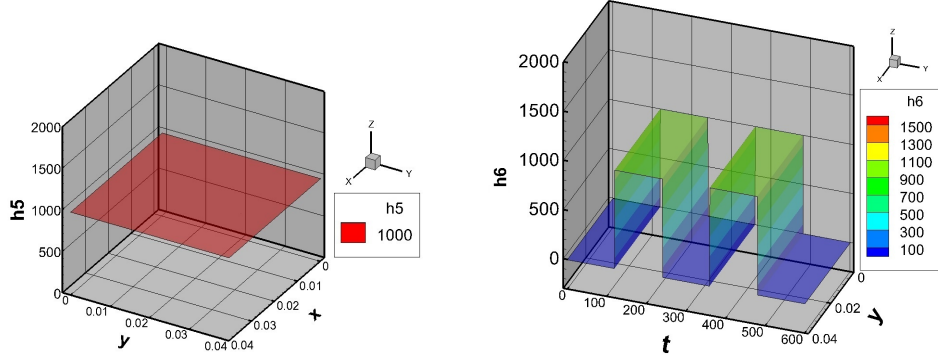
Tabela 5.8: Configuração dos materiais

<b>Configuração 1</b>	$\kappa_1 = \kappa_2 = 54\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ - Aço (AISI 1050) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.474 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$
-----------------------	--

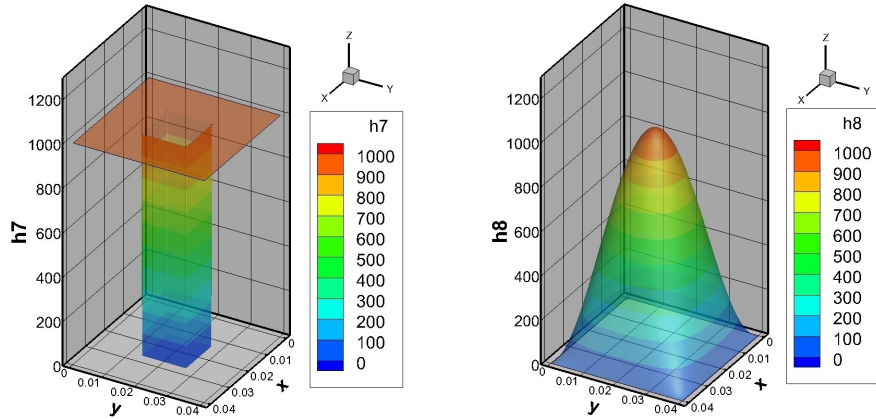
Tabela 5.9: Perfis de condutância térmica de contato.

Perfil - h W/(m <sup>2</sup> °C)		
	$h(x, y)$	$h(t)$
5	$h_5 = h_{max}$	$h_5 = 1$
6	$h_6 = h_{max}$	$h_6 = 0$ para $\left(t < \frac{t_f}{5}\right)$ e $\left(\frac{2t_f}{5} < t < \frac{3t_f}{5}\right)$ e $\left(t > \frac{4t_f}{5}\right)$ $h_6 = 1$ para $\left(\frac{t_f}{5} \leq t \leq \frac{2t_f}{5}\right)$ e $\left(\frac{3t_f}{5} \leq t \leq \frac{4t_f}{5}\right)$
7	$h_7 = h_{max}$ para $\left(x < \frac{a}{8}\right)$ e $\left(x > \frac{3a}{8}\right)$ , $\left(y < \frac{b}{8}\right)$ e $\left(y > \frac{3b}{8}\right)$ $h_7 = h_{max}$ para $\left(x < \frac{5a}{8}\right)$ e $\left(x > \frac{7a}{8}\right)$ , $\left(y < \frac{5b}{8}\right)$ e $\left(y > \frac{7b}{8}\right)$ $h_7 = 0$ para $\left(\frac{a}{8} \leq x \leq \frac{3a}{8}\right)$ , $\left(\frac{b}{8} \leq y \leq \frac{3b}{8}\right)$ $h_7 = 0$ para $\left(\frac{5a}{8} \leq x \leq \frac{7a}{8}\right)$ , $\left(\frac{5b}{8} \leq y \leq \frac{7b}{8}\right)$	$h_7 = 1$
8	$h_8 = h_{max} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right)$	$h_8 = 1$

Nesta abordagem foram estudadas duas metodologias, isto é, a metodologia 1 (ver subseção 4.3.1) onde o problema direto deve ser resolvido para a realização da estimativa e a metodologia 2 (ver subseção 4.3.2) onde elimina-se a necessidade de solução do problema direto.



(a) Condutância Térmica de Contato - Perfil 5      (b) Condutância Térmica de Contato - Perfil 6



(c) Condutância Térmica de Contato - Perfil 7      (d) Condutância Térmica de Contato - Perfil 8

Figura 5.58: Perfis de condutância térmica de contato

Nestas metodologias foram utilizadas medidas de temperatura transientes, mas com perfis de condutância térmica de contato sem variação temporal. Portanto, será analisada a convergência da estimativa da condutância térmica de contato ( $h$ ) conforme a evolução do tempo através da Eq. (5.10), onde  $\mathbf{h}(i)$  representa a estimativa da condutância térmica de contato no tempo  $i$  e  $\mathbf{h}(i - 1)$  representa a estimativa da condutância térmica de contato no tempo anterior  $i - 1$ . Com isso, deseja-se estimar a condutância térmica de contato sem que o problema de transferência de calor atinja o regime permanente.

$$\varepsilon_{h(i)} = \frac{\|\mathbf{h}(i) - \mathbf{h}(i - 1)\|_2}{\|\mathbf{h}(i)\|_2} \quad (5.10)$$

Será realizada a comparação das estimativas com o perfil exato conforme a evolução do tempo através da Eq. (5.11),

$$Erro_h(i, j) = \frac{\sqrt{[\mathbf{h}_{\text{exato}}(i, j) - \mathbf{h}_{\text{estimado}}(i, j)]^2}}{|h_{\text{max}} - h_{\text{min}}|} \quad (5.11)$$

onde  $h_{\text{max}}$  e  $h_{\text{min}}$  são o maior e o menor valor da condutância térmica de contato exata, respectivamente. Com a Eq. (5.11) é possível calcular o campo de erros nas direções  $x$  e  $y$  e, então, encontrar os locais de maiores erros nas estimativas.

Calcula-se ainda o erro RMS através da Eq. (5.12). Com o erro RMS é possível mostrar que conforme aumenta-se o número de medidas de temperatura, o perfil estimado fica mais próximo do perfil exato,

$$Erro_{RMS}(i) = \frac{\|\mathbf{h}_{\text{exato}} - \mathbf{h}_{\text{estimado}}(i)\|_2}{\sqrt{NP}} \quad (5.12)$$

onde  $i$  representa em que tempo está sendo realizada a estimativa e  $NP$  é o número total de pontos da malha.

### 5.2.1 Resultados para o Perfil 7

Nesta seção serão apresentadas as estimativas do perfil 7 com diferentes níveis de ruídos utilizando as duas metodologias vistas na abordagem 2.

#### Estimativa do Perfil 7 - $\sigma = 0^\circ\text{C}$

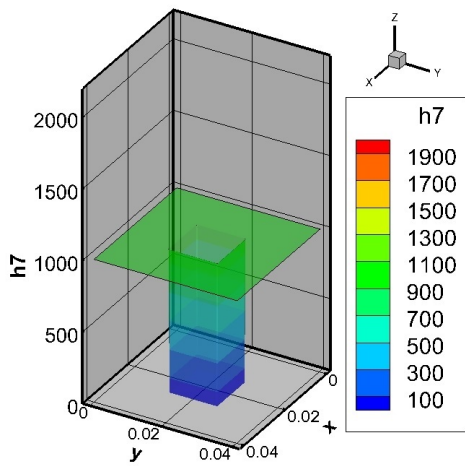
##### Metodologia 1

Como dito anteriormente, na metodologia 1 (ver subseção 4.3.1) o problema direto deve ser resolvido para a realização da estimativa. Primeiramente será analisado o caso sem ruído nas medidas. Sabe-se, das análises feitas na abordagem anterior, que 15 funções em cada direção é o número ideal para a realização da estimativa. A figura 5.59 apresenta a estimativa da condutância térmica de contato utilizando a metodologia 1 com 15 funções em cada direção, isto é,  $\psi_{225} = \psi_x^{15} \times \psi_y^{15}$ , nos tempos 50, 100, 300 e 600 segundos. Observa-se que, conforme mais medidas de temperatura são usadas, a estimativa fica mais próxima do perfil exato (ver figura 5.59a) e que com 300 segundos a estimativa já está bem próxima do perfil apresentado com 600 segundos (ver figuras 5.59d e 5.59e).

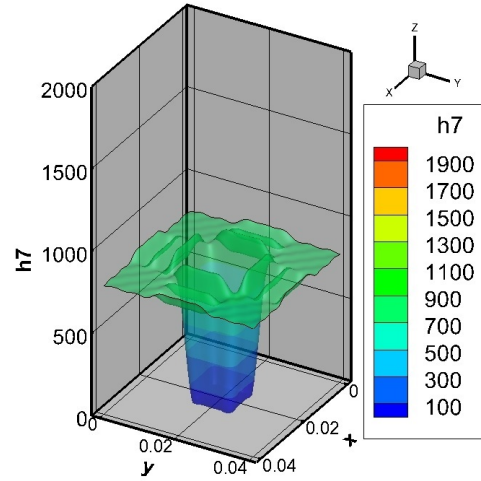
A figura 5.60 apresenta a convergência das estimativas com a evolução do tempo de acordo com a Eq. (5.10). Note que o erro diminui quando mais medidas são utilizadas e que com 300 segundos o erro começa a diminuir mais lentamente. Esse comportamento pode ser confirmado através da figura 5.61 que apresenta o erro RMS para todos os tempos analisados. A partir de 300 segundos não há mais variação significativa no erro RMS.

A figura 5.62 apresenta os erros calculados através da Eq. (5.11) para os tempos 50, 100, 300 e 600 segundos. Conforme mais medidas são utilizadas, as estimativas se aproximam do perfil exato e, com 300 segundos (ver 5.62c), os erros estão bem próximos dos erros encontrados com 600 segundos (ver 5.62d). Com essas figuras é possível notar que os maiores erros se encontram nas descontinuidades da condutância térmica de contato.

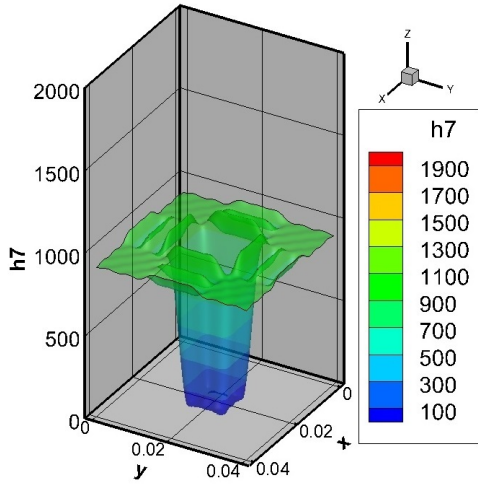




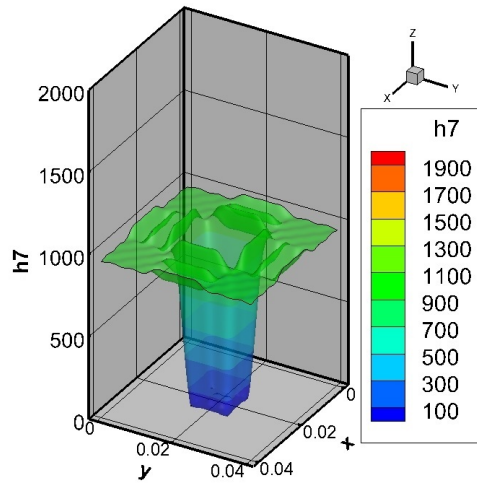
(a) Condutância térmica de contato exata ( $\text{W/m}^2\text{C}$ ) - Perfil 7



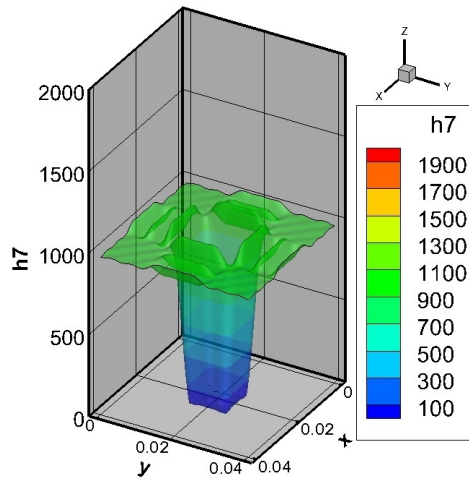
(b) Estimada com 15 funções - 50s - Metodologia 1.



(c) Estimada com 15 funções - 100s - Metodologia 1.



(d) Estimada com 15 funções - 300s - Metodologia 1.



(e) Estimada com 15 funções - 600s - Metodologia 1.

Figura 5.59: Condutância térmica de contato ( $\text{W/m}^2\text{C}$ ) - Perfil 7 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 1 - 15 funções.

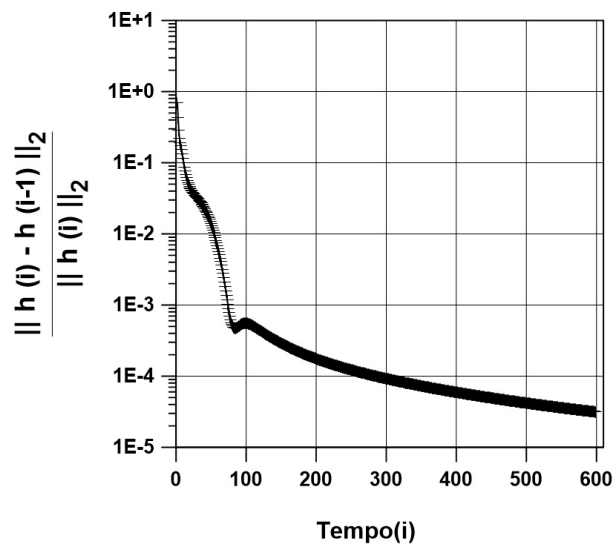


Figura 5.60: Convergência da estimativa - Perfil 7 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 1 - 15 funções.

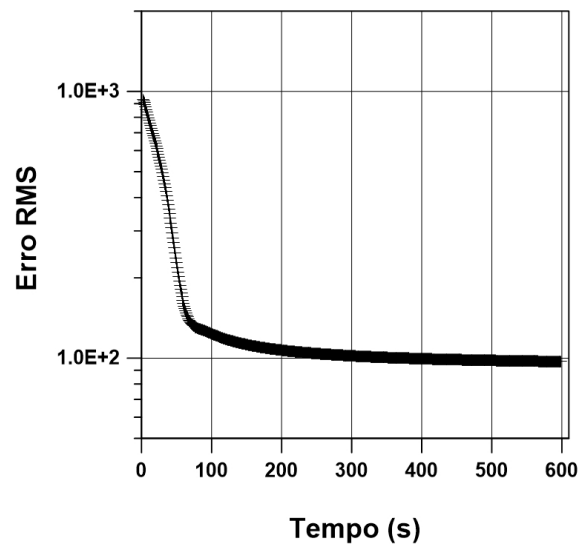
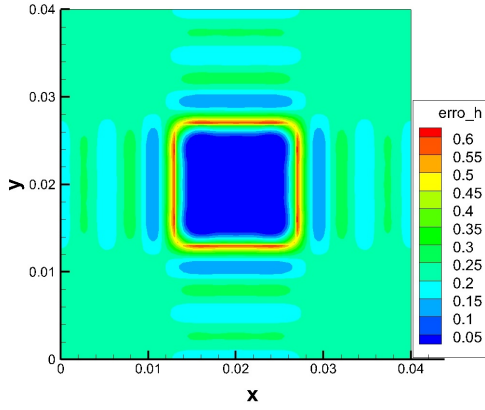
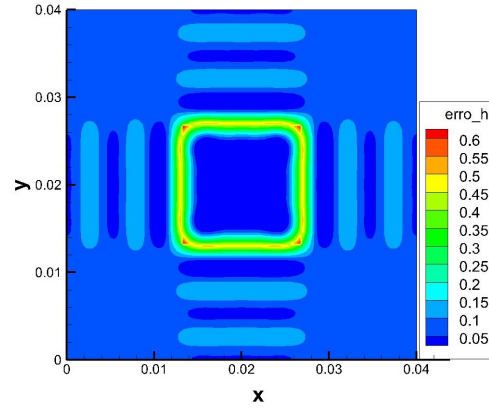


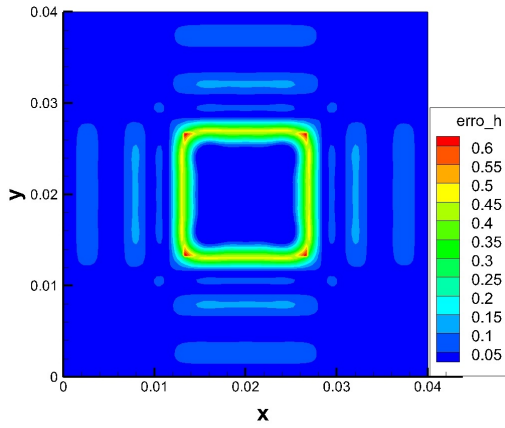
Figura 5.61: Erro RMS - Perfil 7 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 1 - 15 funções.



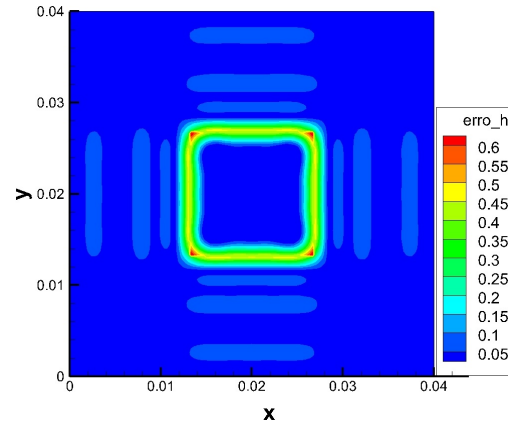
(a) Estimada com 15 funções - 50s - Metodologia 1.



(b) Estimada com 15 funções - 100s - Metodologia 1.



(c) Estimada com 15 funções - 300s - Metodologia 1.

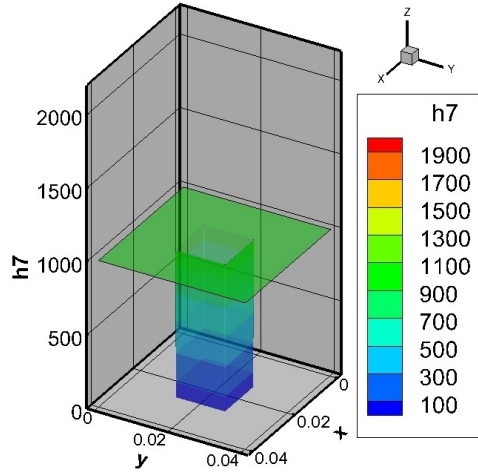


(d) Estimada com 15 funções - 600s - Metodologia 1.

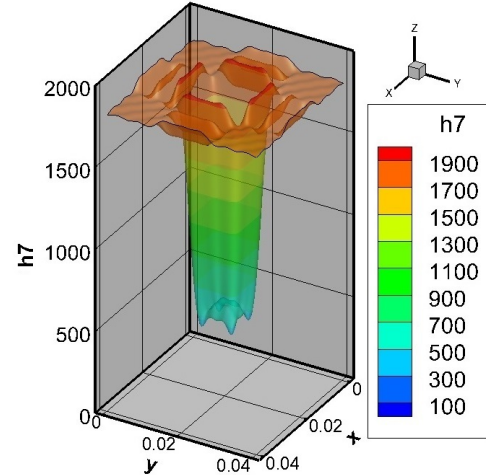
Figura 5.62: Erro - Perfil 7 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 1 - 15 funções.

## Metodologia 2

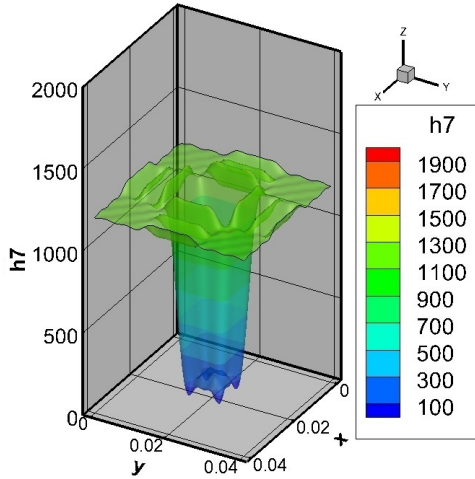
Como dito anteriormente, na metodologia 2 (ver subseção 4.3.2) elimina-se a necessidade da solução do problema direto durante a estimativa. A figura 5.63 apresenta a estimativa da condutância térmica de contato utilizando a metodologia 2 com 15 funções em cada direção, isto é,  $\psi_{225} = \psi_x^{15} \times \psi_y^{15}$ . Note que a estimativa melhora conforme aumenta-se o número de medidas de temperatura usadas. Com 300 segundos é possível ter uma estimativa com boa concordância com o exato (ver figuras 5.63a e 5.63d), o que já era esperado, uma vez que nesta metodologia a condutância térmica de contato é escrita como um somatório e, portanto, quanto mais medidas são usadas, mais próximo se está da estimativa da condutância térmica de contato em regime permanente.



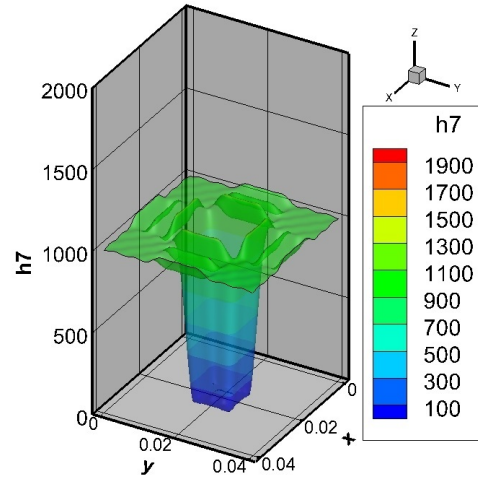
(a) Condutância térmica de contato exata ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 7



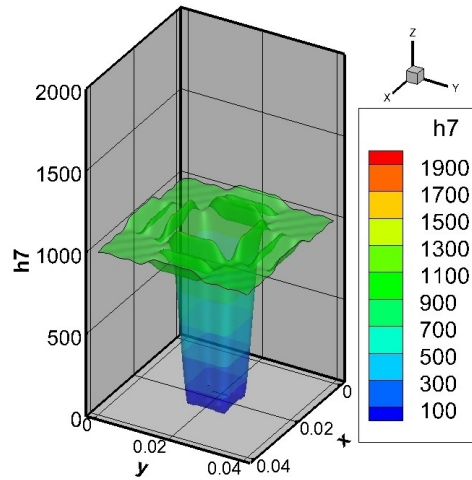
(b) Estimada com 15 funções - 50s - Metodologia 2.



(c) Estimada com 15 funções - 100s - Metodologia 2.



(d) Estimada com 15 funções - 300s - Metodologia 2.



(e) Estimada com 15 funções - 600s - Metodologia 2.

Figura 5.63: Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 7 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

A figura (5.64) mostra a convergência da estimativa. Note que apesar do erro diminuir conforme mais medidas são utilizadas, com 300 segundos o erro com relação à estimativa anterior está na ordem de  $10^{-4}$ , o que mostra que as estimativas já estão bem próximas entre si.

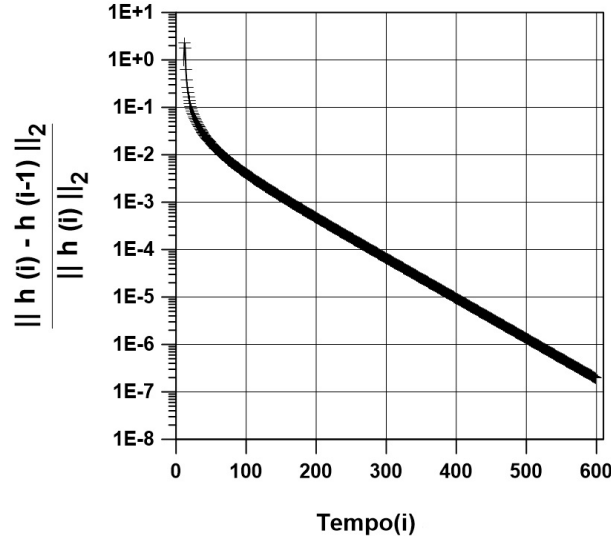


Figura 5.64: Convergência da estimativa - Perfil 7 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

A figura 5.65 apresenta o erro RMS para todos os tempos analisados. A partir de 250 segundos não há mais variação significativa no erro RMS.

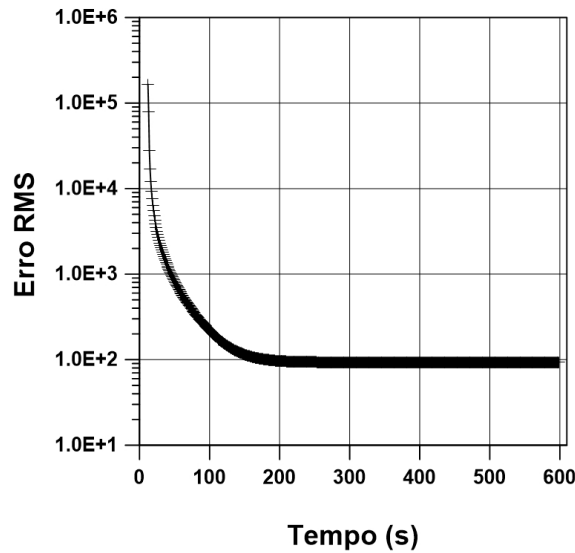
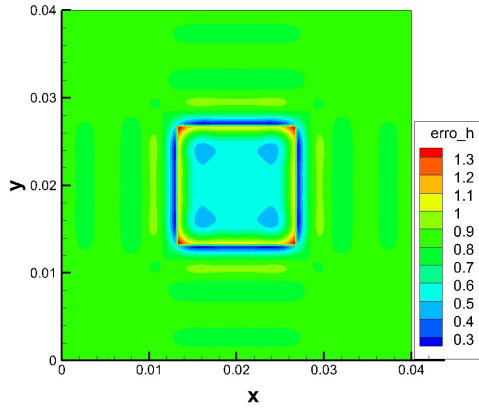
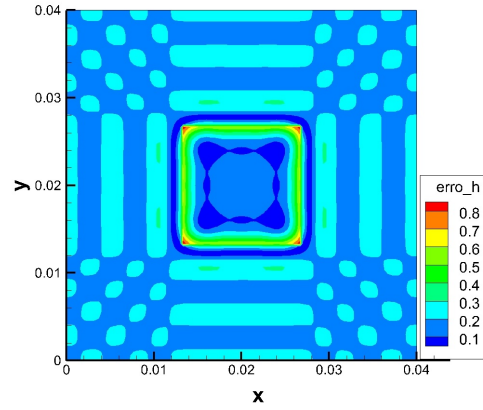


Figura 5.65: Erro RMS - Perfil 7 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

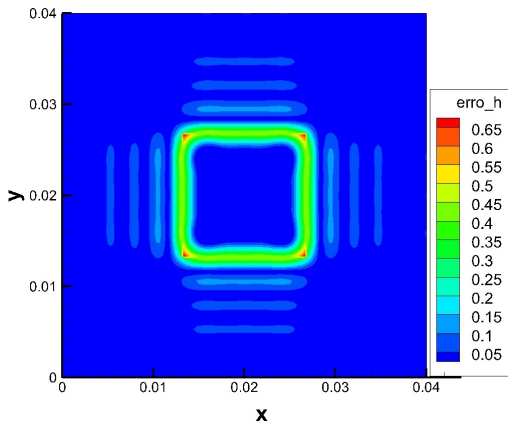
A figura 5.66 apresenta os erros calculados através da Eq. (5.11) para os tempos 50, 100, 300 e 600 segundos. Nota-se que com 300 segundos (ver figura 5.66c), os erros estão bem próximos dos erros encontrados com 600 segundos (ver figura 5.66d). Novamente, nota-se que os maiores erros se encontram nas descontinuidades da condutância térmica de contato.



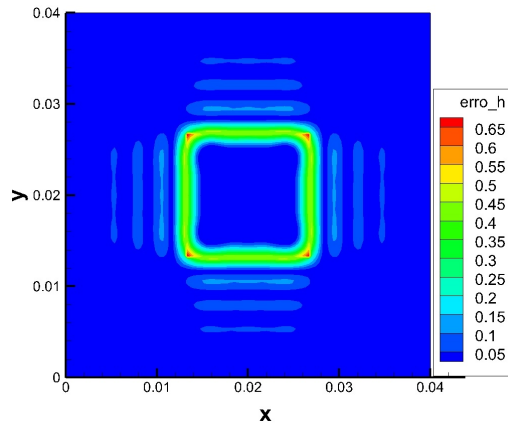
(a) Estimada com 15 funções - 50s - Metodologia 2.



(b) Estimada com 15 funções - 100s - Metodologia 2.



(c) Estimada com 15 funções - 300s - Metodologia 2.



(d) Estimado com 15 funções - 600s - Metodologia 2.

Figura 5.66: Erro - Perfil 7 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

Avaliando os resultados das metodologias 1 e 2, nota-se que as figuras 5.62c e 5.62d são muito parecidas com as figuras 5.66c e 5.66d, respectivamente, mostrando que as duas metodologias são semelhantes em relação à qualidade dos resultados estimados. Com relação ao tempo computacional necessário para a realização das estimativas, a tabela 5.10 apresenta o tempo computacional para a estimativa dos casos anteriores, isto é, com perfil 7, sem ruído nas medidas e utilizando as metodologias 1 e 2. Pode-se notar que a metodologia 2 é muito mais rápida, uma vez que não precisa da solução do problema direto.

Para diminuir o tempo computacional da metodologia 1, pode-se diminuir o número de funções utilizadas na estimativa. A figura 5.67 apresenta a estimativa da condutância térmica de contato utilizando a metodologia 1 com 7 funções em cada direção, isto é,  $\psi_{49} = \psi_x^7 \times \psi_y^7$ . Note que com 100 segundos (ver figura 5.67a) é possível obter uma estimativa razoável e, ao utilizar mais medidas de temperatura, por exemplo, 600 segundos como mostrado na figura 5.67b, é possível observar que a estimativa se aproxima mais do perfil exato apresentado na figura 5.59a.

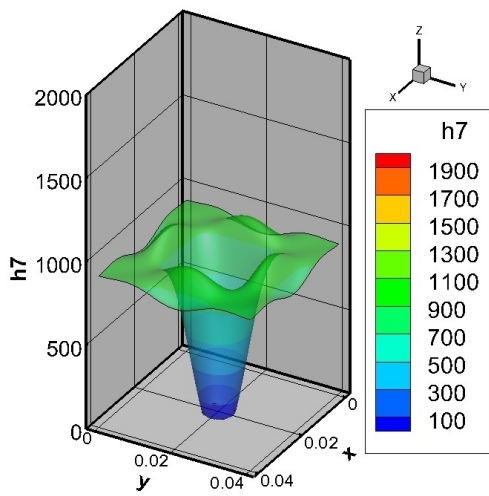
Tabela 5.10: Tempo Computacional - Perfil 7 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - 15 funções.

<b>Tempo Computacional</b>	
Caso	tempo (segundos)
<b>Metodologia 1 - 15 funções - 50s</b>	6468.49
<b>Metodologia 1 - 15 funções - 100s</b>	12727.30
<b>Metodologia 1 - 15 funções - 300s</b>	37636.92
<b>Metodologia 1 - 15 funções - 600s</b>	75338.21
<b>Metodologia 2 - 15 funções - 50s</b>	167.92
<b>Metodologia 2 - 15 funções - 100s</b>	317.61
<b>Metodologia 2 - 15 funções - 300s</b>	917.51
<b>Metodologia 2 - 15 funções - 600s</b>	1815.19

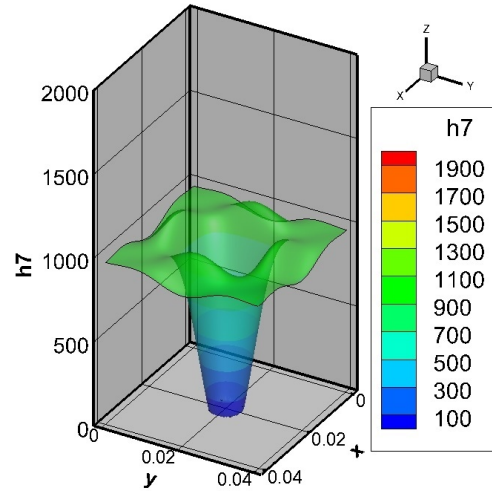
Para realizar a estimativa com 7 funções e  $t = 600$  segundos foi necessário um tempo computacional de 16798.03 segundos. Já com 15 funções o tempo computacional é de 75338.21 segundos como foi visto na tabela 5.10.

A figura 5.68 apresenta o cálculo do erro dado pela Eq. (5.11) para os tempos 100 e 600 segundos. Note que os erros encontrados na estimativa utilizando a metodologia 1 com 7 funções são maiores ao redor da descontinuidade quando comparados com os erros encontrados na estimativa utilizando a metodologia 1 com 15 funções (ver figuras 5.62 e 5.68). Isto é, apesar de diminuir o tempo computacional, os resultados são menos precisos ao utilizar 7 funções.

Pode-se notar que a diminuição do número de funções diminui o tempo computacional consideravelmente mas, ainda assim, a metodologia 2 é bem mais rápida e com bons resultados.

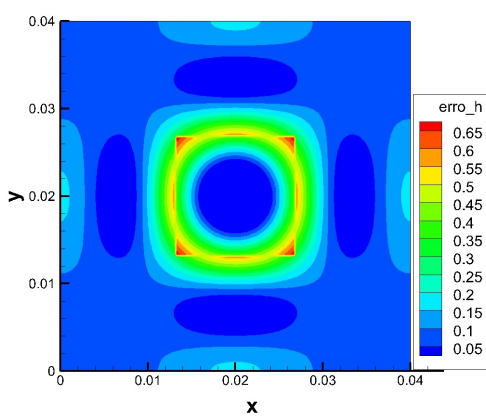


(a) Estimada com 7 funções - 100s - Metodologia 1.

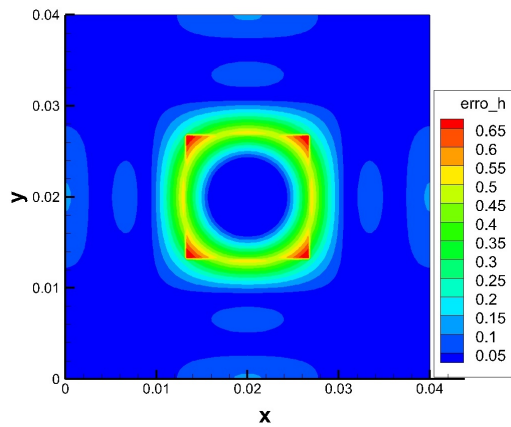


(b) Estimada com 7 funções - 600s - Metodologia 1.

Figura 5.67: Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 7 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 1 - 7 funções.



(a) Estimada com 7 funções - 100s - Metodologia 1.



(b) Estimado com 7 funções - 600s - Metodologia 1.

Figura 5.68: Erro - Perfil 7 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 1 - 7 funções.



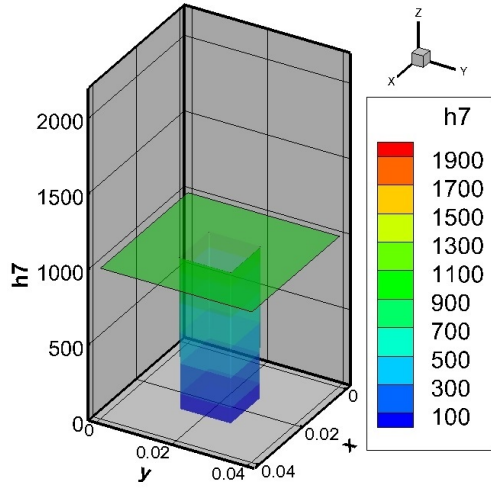
## Estimativa do Perfil 7 - $\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$

### Metodologia 1

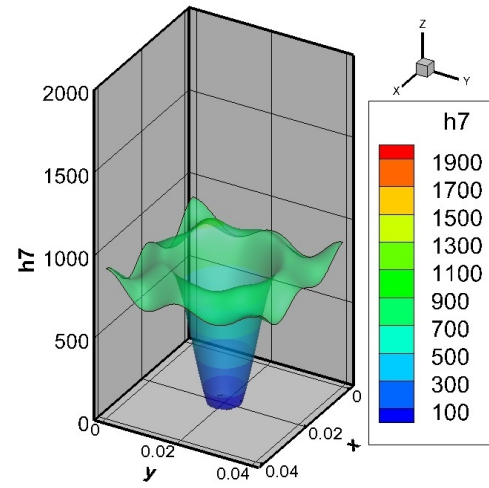
Acrescentando ruído com  $\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$  nas medidas, temos na figura 5.69 a estimativa da condutância térmica de contato utilizando a metodologia 1 com 15 funções em cada direção. O perfil 7, já foi estudado anteriormente na abordagem 1 como perfil 2 (caso 16). Por este motivo, serão utilizados os mesmos parâmetros de truncamento encontrados na seção anterior, isto é,  $1 \times 10^5$  e  $1 \times 10^{-3}$  para os sistemas lineares referentes ao salto de temperatura e ao fluxo de calor, respectivamente (ver tabela 5.6).

As estimativas com 300 e 600 segundos estão muito próximas entre si, como pode ser visto nas figuras (5.69d) e (5.69e). Isto é confirmado pela figura (5.70), que apresenta a convergência da estimativa, onde após 150 segundos o erro entre as estimativas oscila em torno de um valor médio.

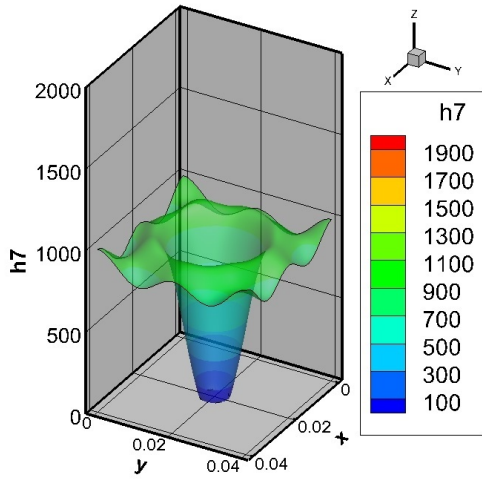
As figuras 5.71 e 5.72 apresentam o erro RMS e o erro calculado através da Eq. (5.11), respectivamente. Analisando estas figuras, conclui-se que a partir de 300 segundos as estimativas já estão bem próximas entre si e os erros cometidos nas descontinuidades da condutância térmica de contato continuarão presentes mesmo que o problema atinja o regime permanente, tendo em vista que este fato é uma dificuldade inerente do método.



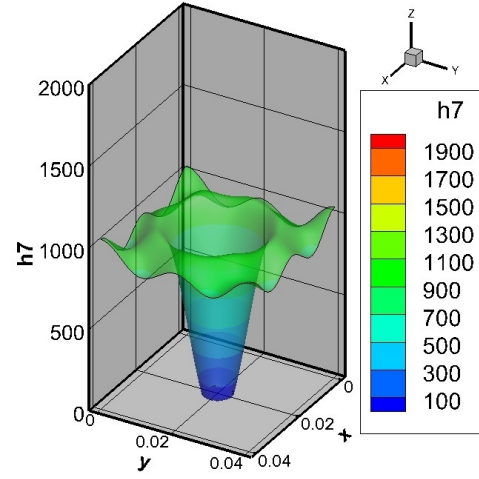
(a) Condutância térmica de contato exata ( $\text{W/m}^2\text{C}$ ) - Perfil 7



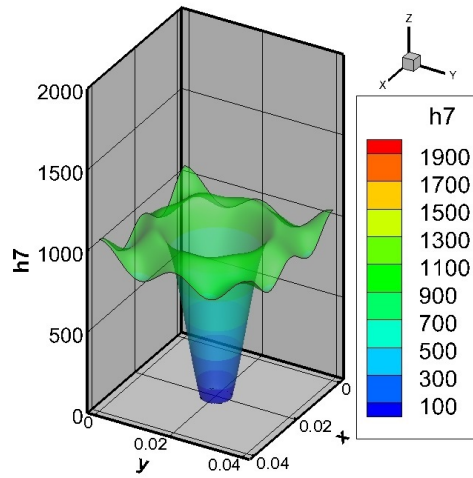
(b) Estimada com 15 funções - 50s - Metodologia 1.



(c) Estimada com 15 funções - 100s - Metodologia 1.



(d) Estimada com 15 funções - 300s - Metodologia 1.



(e) Estimada com 15 funções - 600s - Metodologia 1.

Figura 5.69: Condutância térmica de contato ( $\text{W/m}^2\text{C}$ ) - Perfil 7 -  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$  - Metodologia 1 - 15 funções.

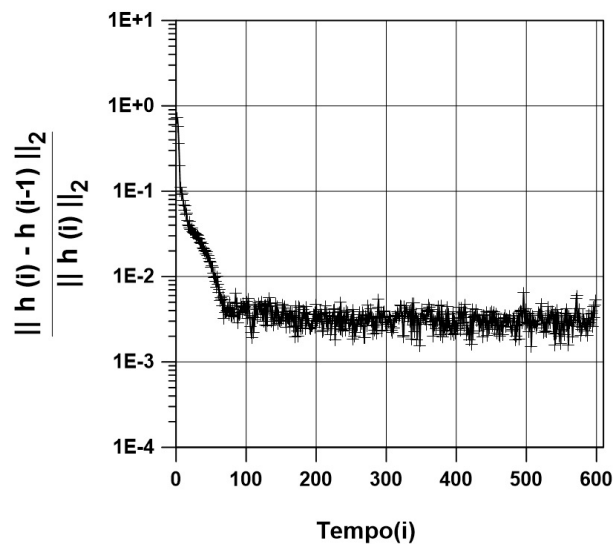


Figura 5.70: Convergência da estimativa - Perfil 7 -  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$  - Metodologia 1 - 15 funções.

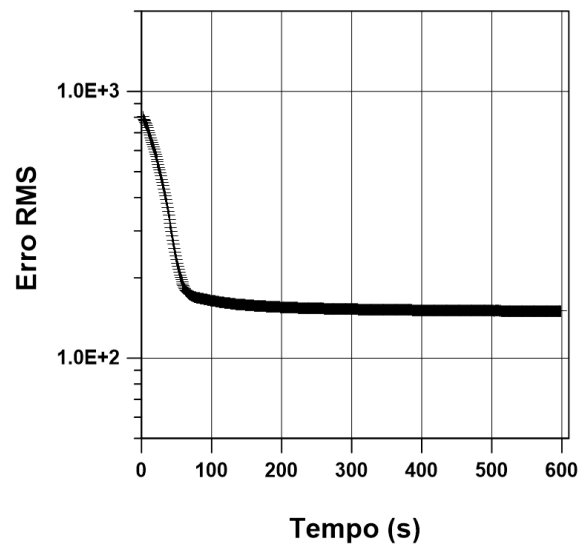
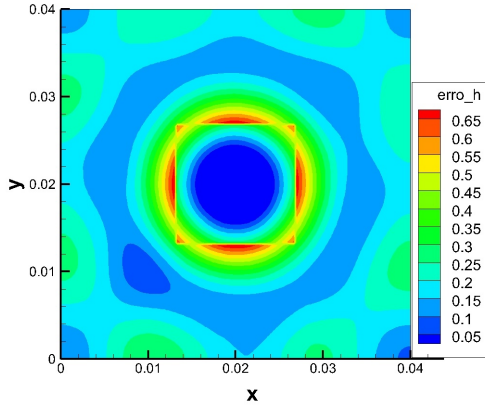
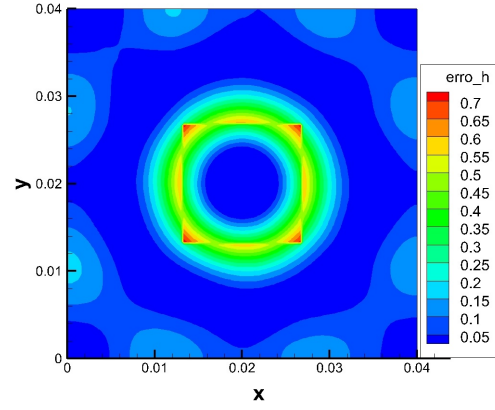


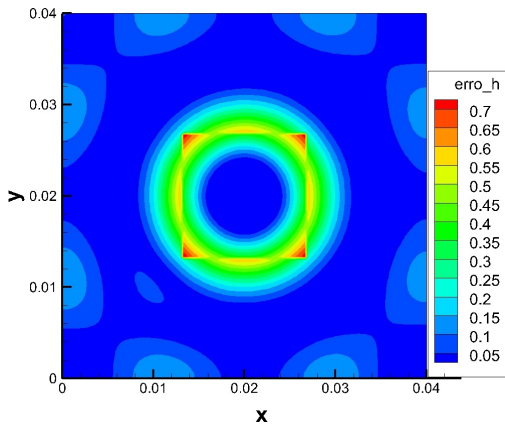
Figura 5.71: Erro RMS - Perfil 7 -  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$  - Metodologia 1 - 15 funções.



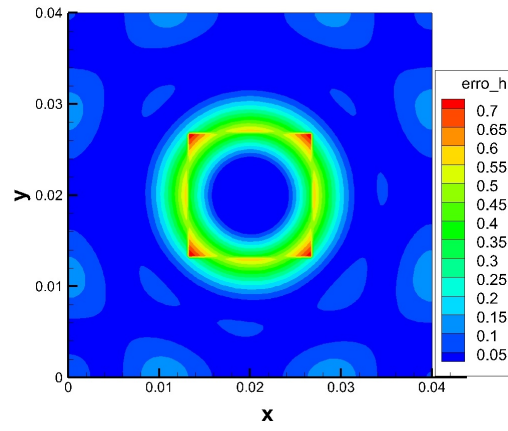
(a) Estimada com 15 funções - 50s - Metodologia 1.



(b) Estimada com 15 funções - 100s - Metodologia 1.



(c) Estimada com 15 funções - 300s - Metodologia 1.

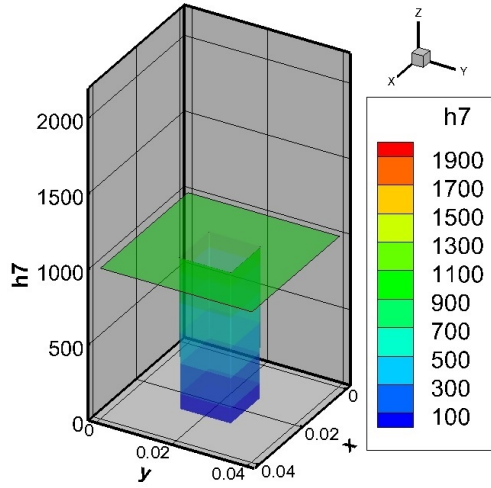


(d) Estimado com 15 funções - 600s - Metodologia 1.

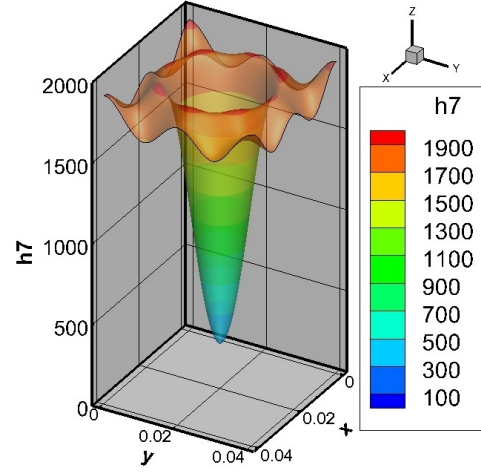
Figura 5.72: Erro - Perfil 7 -  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$  - Metodologia 1 - 15 funções.

## Metodologia 2

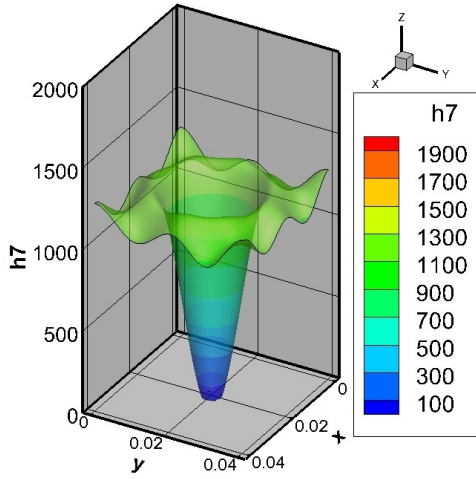
A figura 5.73 apresenta a estimativa da condutância térmica de contato utilizando a metodologia 2 com 15 funções em cada direção. Como no caso sem ruído, a estimativa melhora conforme aumenta-se o número de medidas de temperatura usadas. Note que com 50 segundos a estimativa é muito ruim. Já com 100 segundos há uma melhora significativa e com 300 segundos é possível ter uma estimativa com boa concordância com perfil o exato (ver figuras 5.73a e 5.73d).



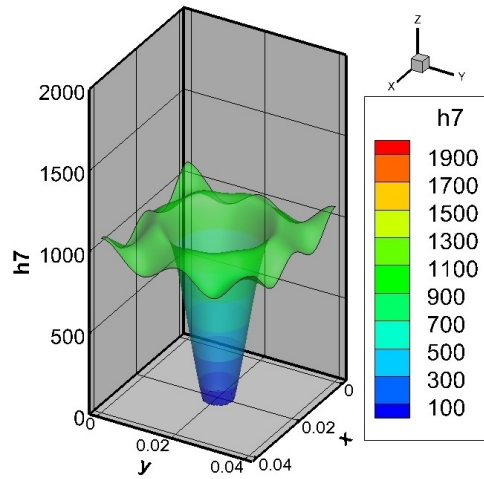
(a) Condutância térmica de contato exata ( $\text{W/m}^2\text{°C}$ ) - Perfil 7



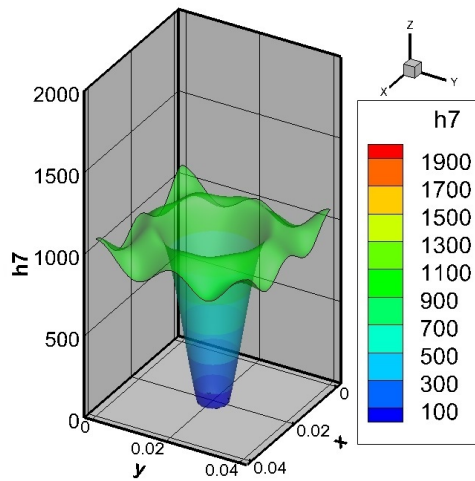
(b) Estimada com 15 funções - 50s - Metodologia 2.



(c) Estimada com 15 funções - 100s - Metodologia 2.



(d) Estimada com 15 funções - 300s - Metodologia 2.



(e) Estimada com 15 funções - 600s - Metodologia 2.

Figura 5.73: Condutância térmica de contato ( $\text{W/m}^2\text{°C}$ ) - Perfil 7 -  $\sigma = 0.2\text{°C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

A figura (5.74) mostra a convergência da estimativa do perfil 7 utilizando a metodologia 2. Note que a partir de 200 segundos as estimativas começam a ficar muito próximas entre si, mostrando uma convergência. O erro RMS apresentado na figura 5.75 confirma este comportamento.

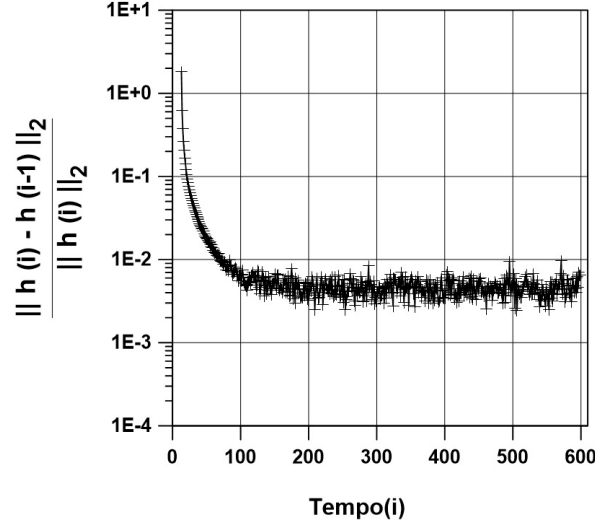


Figura 5.74: Convergência da estimativa - Perfil 7 -  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

A figura 5.76 apresenta o erro calculado através da Eq. (5.11). Novamente, através destas análises é possível concluir que, com 300 segundos, o erro cometido na estimativa está muito próximo do erro cometido na estimativa com 600 segundos e com baixo tempo computacional, como pode ser visto através da tabela 5.11. Para a realização desta estimativa com 300 medidas e utilizando a metodologia 2 foram necessários 943.96 segundos, isto é, menos de 20 minutos para realizar uma estimativa bidimensional.

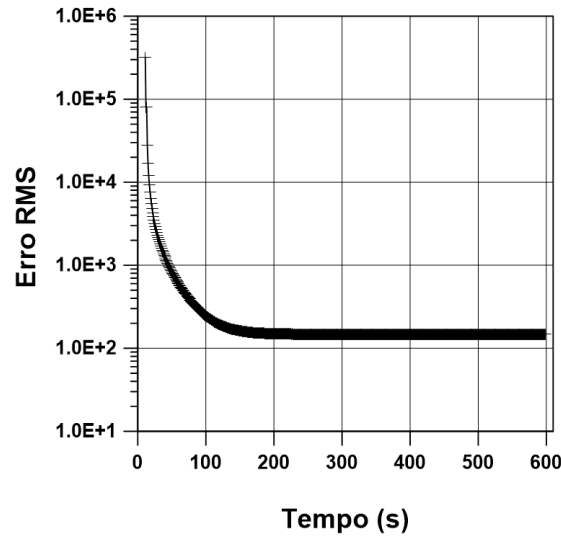
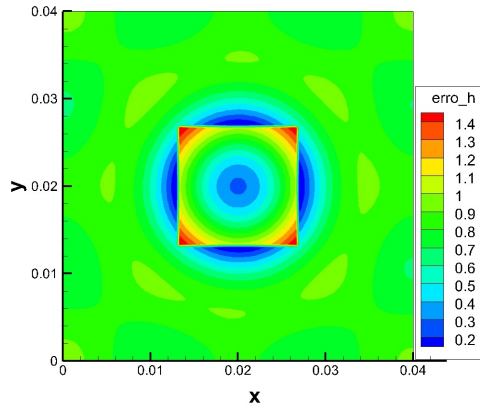
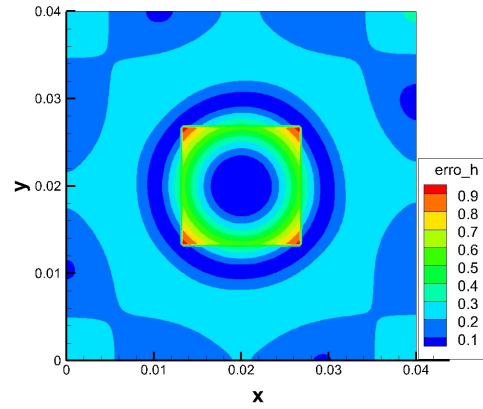


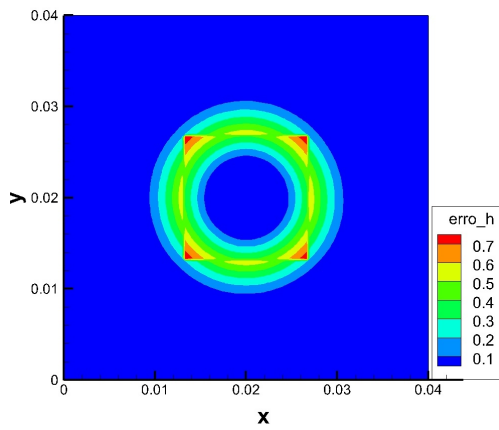
Figura 5.75: Erro RMS - Perfil 7 -  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.



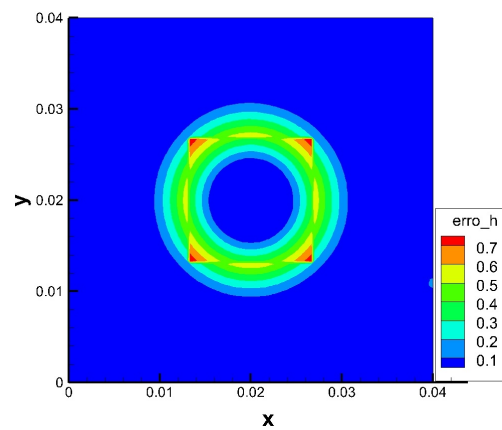
(a) Estimada com 15 funções - 50s - Metodologia 2.



(b) Estimada com 15 funções - 100s - Metodologia 2.



(c) Estimada com 15 funções - 300s - Metodologia 2.



(d) Estimado com 15 funções - 600s - Metodologia 2.

Figura 5.76: Erro - Perfil 7 -  $\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

Tabela 5.11: Tempo Computacional - Perfil 7 -  $\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$  - 15 funções.

<b>Tempo Computacional</b>	
Caso	tempo (segundos)
<b>Metodologia 1 - 15 funções - 50s</b>	6466.16
<b>Metodologia 1 - 15 funções - 100s</b>	12726.62
<b>Metodologia 1 - 15 funções - 300s</b>	37580.48
<b>Metodologia 1 - 15 funções - 600s</b>	74743.58
<b>Metodologia 2 - 15 funções - 50s</b>	177.60
<b>Metodologia 2 - 15 funções - 100s</b>	330.62
<b>Metodologia 2 - 15 funções - 300s</b>	943.96
<b>Metodologia 2 - 15 funções - 600s</b>	1859.90

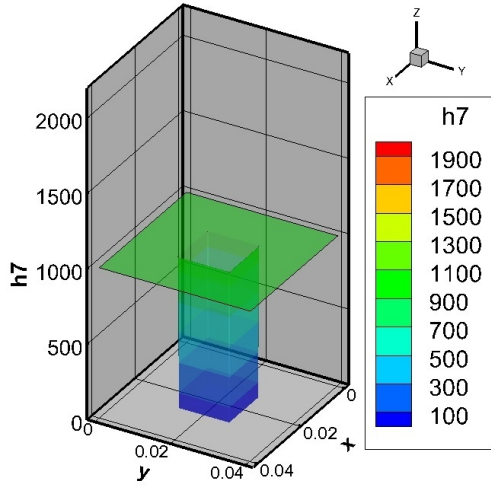
### Estimativa do Perfil 7 - $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$

#### Metodologia 1

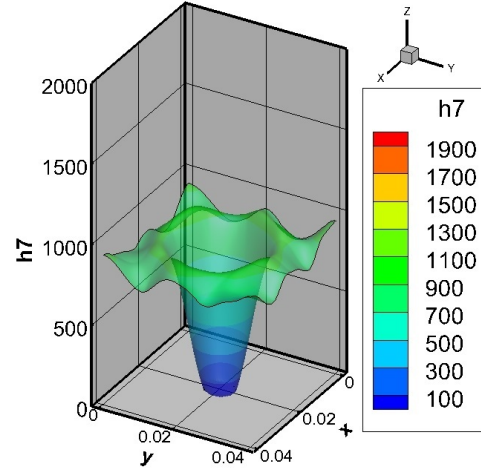
Acrescentando ruído com  $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$  nas medidas, tem-se na figura 5.77 a estimativa da condutância térmica de contato utilizando a metodologia 1 com 15 funções em cada direção. Este perfil já foi estudado anteriormente como perfil 2 na abordagem 1 (caso 28). Portanto serão utilizados os mesmos parâmetros de truncamento encontrados na seção anterior, isto é,  $1 \times 10^5$  e  $1 \times 10^{-3}$  para os sistemas lineares referente ao salto de temperatura e ao fluxo de calor, respectivamente (ver tabela 5.6).

As figuras 5.78, 5.79 e 5.80 apresentam a convergência da estimativa com o tempo, o erro RMS e o erro apresentado na Eq. (5.11), respectivamente. Assim como no caso estudado anteriormente com a metodologia 1 e com  $\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$ , é possível notar que após 150 segundos as estimativas estão próximas entre si e com 300 segundos é possível obter uma estimativa muito próxima do perfil exato. Isto é, mesmo que se utilize mais medidas de temperatura, a qualidade da solução não irá melhorar significativamente, uma vez que o erro RMS a partir de 300 segundos não se altera substancialmente.

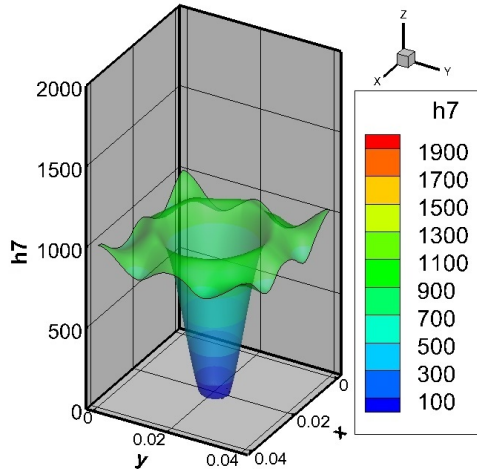




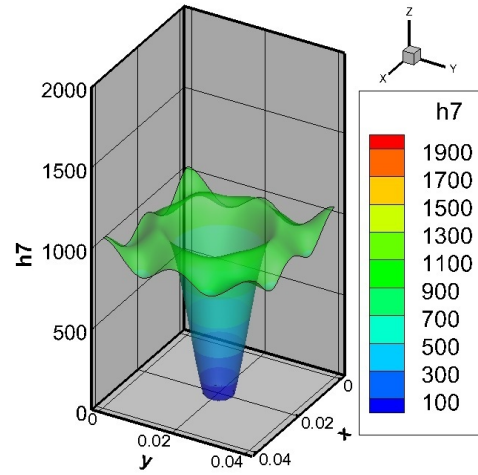
(a) Condutância térmica de contato exata (W/m<sup>2</sup>°C) - Perfil 7



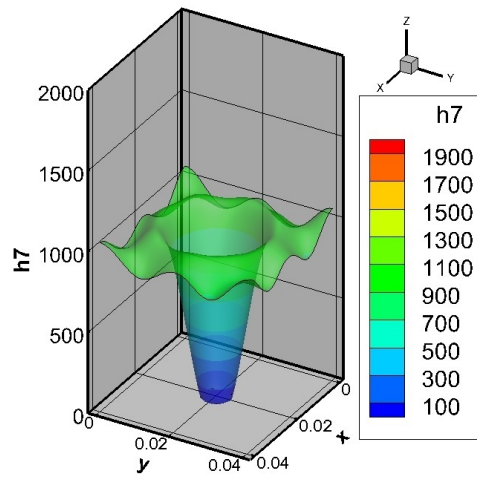
(b) Estimada com 15 funções - 50s - Metodologia 1.



(c) Estimada com 15 funções - 100s - Metodologia 1.



(d) Estimada com 15 funções - 300s - Metodologia 1.



(e) Estimada com 15 funções - 600s - Metodologia 1.

Figura 5.77: Condutância térmica de contato (W/m<sup>2</sup>°C) - Perfil 7 -  $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$  - Metodologia 1 - 15 funções.

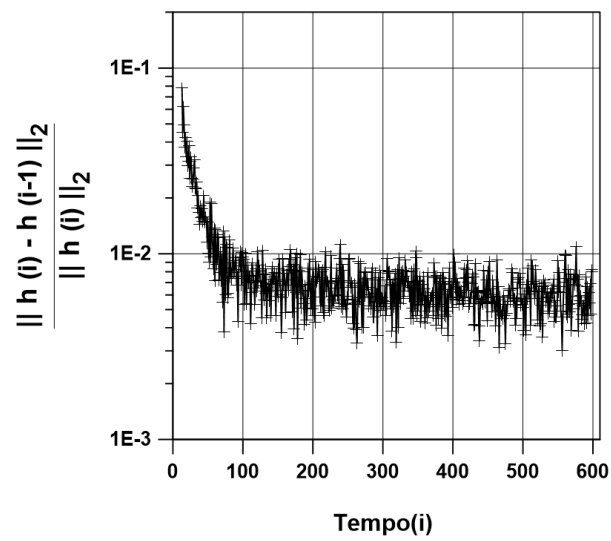


Figura 5.78: Convergência da estimativa - Perfil 7 -  $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$  - Metodologia 1 - 15 funções.

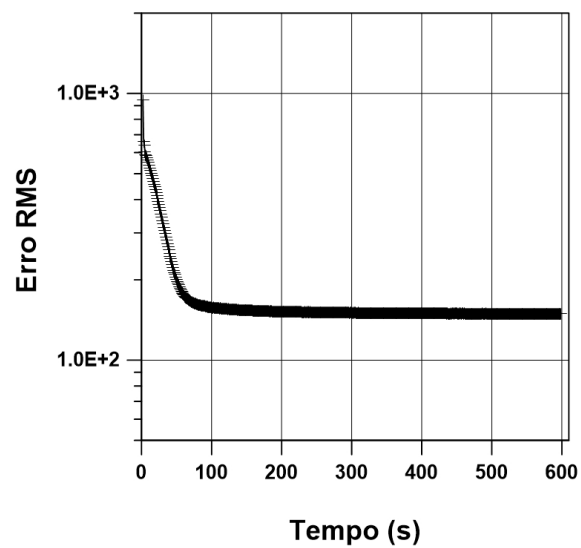
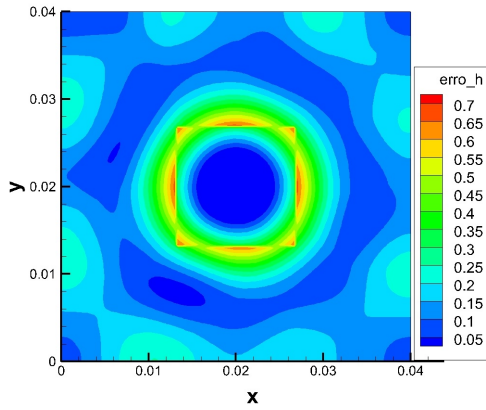
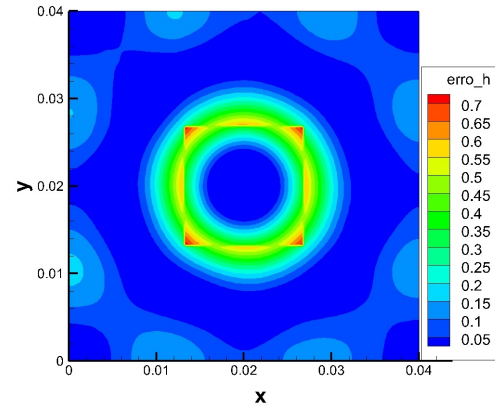


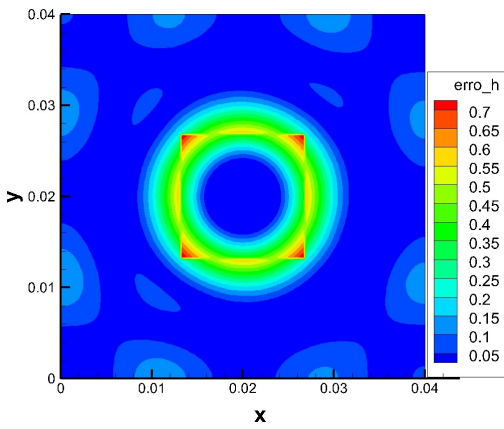
Figura 5.79: Erro RMS - Perfil 7 -  $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$  - Metodologia 1 - 15 funções.



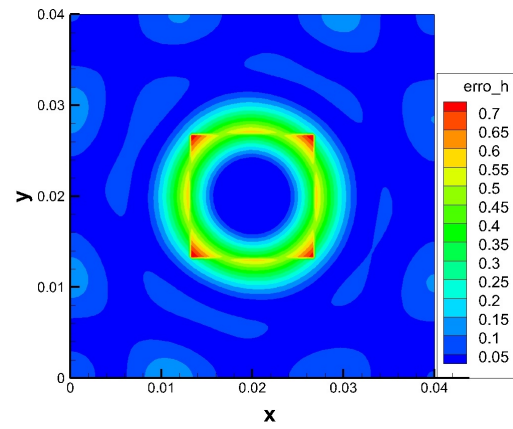
(a) Estimada com 15 funções - 50s - Metodologia 1.



(b) Estimada com 15 funções - 100s - Metodologia 1.



(c) Estimada com 15 funções - 300s - Metodologia 1.

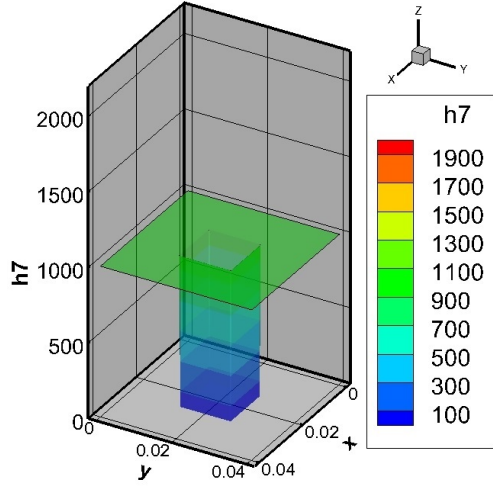


(d) Estimado com 15 funções - 600s - Metodologia 1.

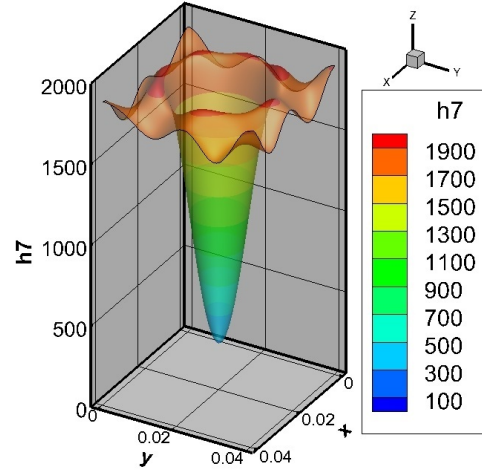
Figura 5.80: Erro - Perfil 7 -  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$  - Metodologia 1 - 15 funções.

## Metodologia 2

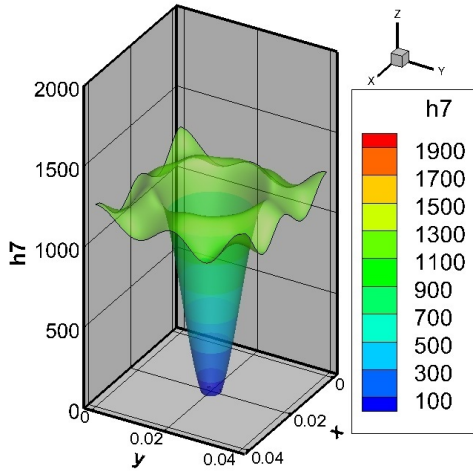
A figura 5.81 mostra a evolução das estimativas com o passar do tempo, utilizando a metodologia 2 com 15 funções em cada direção. O comportamento é o mesmo apresentado para o caso com ruído ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ).



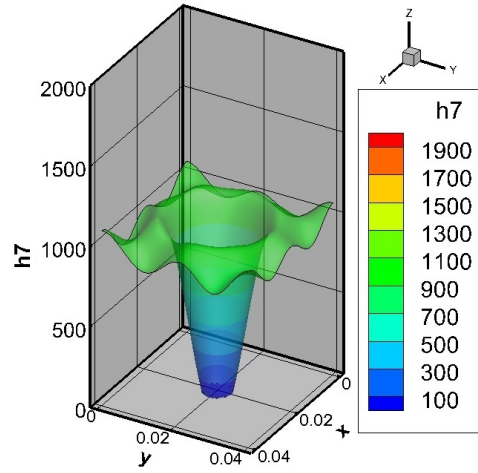
(a) Condutância térmica de contato exata (W/m<sup>2</sup>°C) - Perfil 7



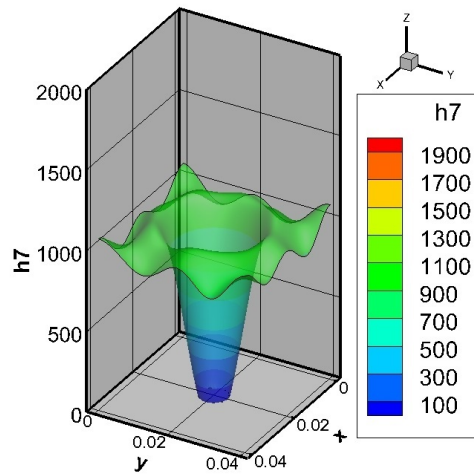
(b) Estimada com 15 funções - 50s - Metodologia 2.



(c) Estimada com 15 funções - 100s - Metodologia 2.



(d) Estimada com 15 funções - 300s - Metodologia 2.



(e) Estimada com 15 funções - 600s - Metodologia 2.

Figura 5.81: Condutância térmica de contato (W/m<sup>2</sup>°C) - Perfil 7 -  $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

As figuras 5.82, 5.83 e 5.84 apresentam a convergência da estimativa com o tempo, o erro RMS e o erro apresentado na Eq. (5.11), respectivamente. Assim como no caso estudado anteriormente com a metodologia 2 e com  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ , as estimativas melhoram quando mais medidas de temperatura são utilizadas e, a partir de um certo número de medidas, não há mais alteração significativa na qualidade dos resultados (ver figura 5.83). Novamente, com 300 segundos foi possível obter uma boa estimativa do perfil da condutância térmica de contato.

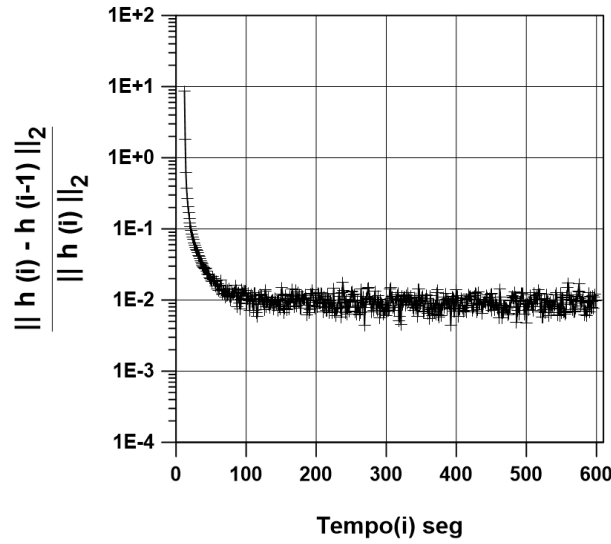


Figura 5.82: Convergência da estimativa - Perfil 7 -  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

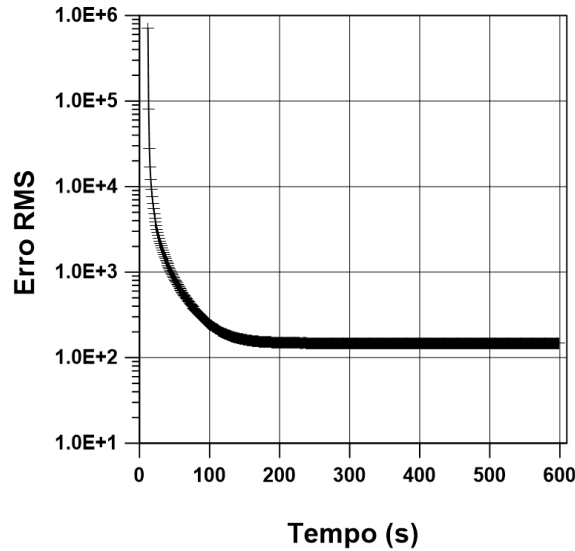
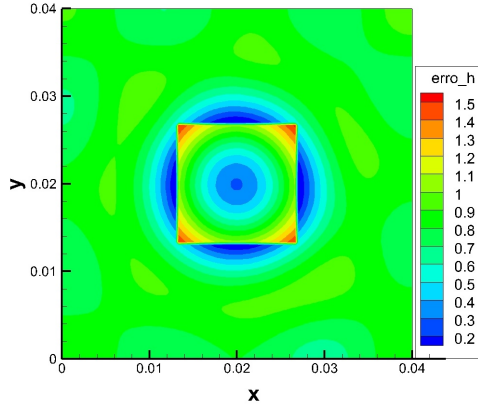
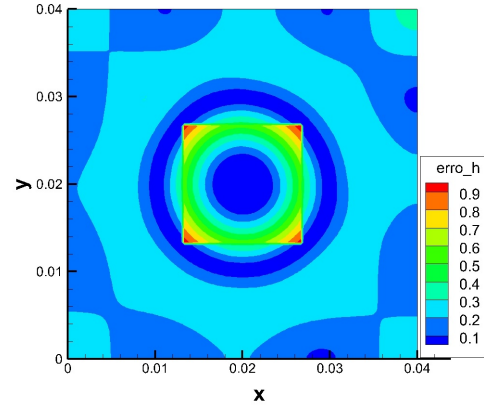


Figura 5.83: Erro RMS - Perfil 7 -  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

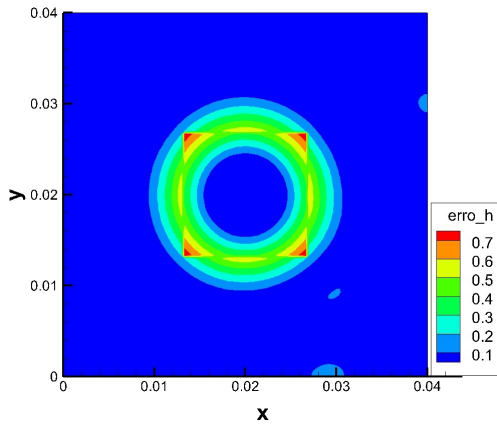
A tabela 5.12 apresenta o tempo computacional para a estimativa dos casos anteriores, isto é, com perfil 7, com ruído ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) nas medidas e utilizando as metodologias 1 e 2. Apesar dos resultados das metodologias 1 e 2, a partir de



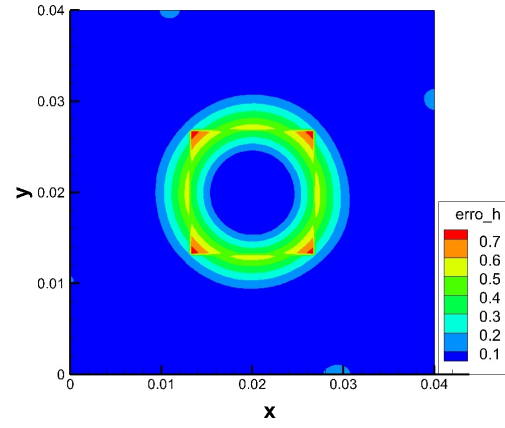
(a) Estimada com 15 funções - 50s - Metodologia 2.



(b) Estimada com 15 funções - 100s - Metodologia 2.



(c) Estimada com 15 funções - 300s - Metodologia 2.



(d) Estimado com 15 funções - 600s - Metodologia 2.

Figura 5.84: Erro - Perfil 7 -  $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

300 segundos, serem próximos (ver figuras 5.77 e 5.81), o tempo computacional é muito diferente. Observando a tabela 5.12 nota-se que a metodologia 2 é muito mais rápida.

Tabela 5.12: Tempo Computacional - Perfil 7 -  $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$  - 15 funções.

<b>Tempo Computacional</b>	
Caso	tempo (segundos)
<b>Metodologia 1 - 15 funções - 50s</b>	7122.12
<b>Metodologia 1 - 15 funções - 100s</b>	14048.89
<b>Metodologia 1 - 15 funções - 300s</b>	42035.60
<b>Metodologia 1 - 15 funções - 600s</b>	82673.04
<b>Metodologia 2 - 15 funções - 50s</b>	175.25
<b>Metodologia 2 - 15 funções - 100s</b>	330.80
<b>Metodologia 2 - 15 funções - 300s</b>	949.01
<b>Metodologia 2 - 15 funções - 600s</b>	1875.12

Os resultados obtidos para o perfil 8, com as duas metodologias apresentadas nesta abordagem e com os diferentes níveis de ruído, estão apresentados no apêndice C.

Analisando todos os casos estudados, inclusive os que estão no apêndice C, pode-se observar que:

- Ambas metodologias apresentam bons resultados com o aumento do número de medidas utilizadas. Com 300 segundos é possível obter uma estimativa próxima da estimativa obtida com 600 segundos. Este comportamento pode ser observado analisando o erro RMS das estimativas e também pela análise de convergência da estimativa.
- Pode-se observar que o erro RMS e a convergência das estimativas apresentam, na maioria dos casos, o mesmo comportamento. Portanto, a análise de convergência pode ser utilizada como critério de parada, uma vez que o erro RMS precisa do perfil exato da condutância térmica de contato, enquanto a análise da convergência só utiliza as estimativas conforme mais medidas são utilizadas;
- As metodologias apresentadas na abordagem 2 resultam em estimativas parecidas com o aumento do número de medidas utilizadas. Por este motivo, pode-se dizer que as metodologias são equivalentes com relação à qualidade dos resultados quando o número de medidas é igual ou superior a 300 segundos;
- O erro calculado através da Eq. (5.11) mostra os locais onde os maiores erros são cometidos. No caso do perfil 7 os maiores erros estão na posição da descontinuidade da condutância térmica de contato, o que era esperado. Os erros no perfil 8 são bem menores que no perfil 7, o que também era esperado tendo em vista que este perfil é suave;
- A escolha do parâmetro de truncamento do método TSVD interfere na qualidade das estimativas com ruídos nas medidas. Este parâmetro foi determinado na abordagem 1 mas também poderia ter sido avaliado nesta abordagem utilizando somente a última medida de temperatura disponível. No caso deste trabalho, as medidas de temperatura obtidas com 600 segundos;
- As limitações da abordagem 2 com relação à qualidade da estimativa são as mesmas apresentadas na abordagem 1;
- Com relação ao tempo computacional, a metodologia 2 é muito mais rápida tendo em vista que nesta metodologia não há a necessidade da solução do problema direto durante a estimativa.



### 5.3 Abordagem 3

Na abordagem 3 foi estudado um problema de transferência de calor tridimensional em regime transiente com perfil de condutância térmica de contato bidimensional com e sem variação no tempo. A formulação do problema físico foi apresentada no capítulo 3.

Para isso, foi considerado o contato entre dois materiais iguais, isto é, configuração 1 (ver tabela 5.13). Nesta abordagem foram utilizados os perfis 5 e 6 apresentados na tabela 5.9 e na figura 5.58.

Tabela 5.13: Configuração dos materiais

<b>Configuração 1</b>	$\kappa_1 = \kappa_2 = 54 \text{ W}/(\text{m}^\circ\text{C})$ - Aço (AISI 1050) $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.474 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
-----------------------	--

Será realizada a comparação das estimativas com o perfil exato através da Eq. (5.13),

$$Erro_h(i, j, t) = \frac{\sqrt{[\mathbf{h}_{\text{exato}}(i, j, t) - \mathbf{h}_{\text{estimado}}(i, j, t)]^2}}{|h_{\text{max}} - h_{\text{min}}|} \quad (5.13)$$

onde  $h_{\text{max}}$  e  $h_{\text{min}}$  são o maior e o menor valor da condutância térmica de contato exata, respectivamente. Com a Eq. (5.13) é possível calcular o campo de erros nas direções  $x$ ,  $y$  e  $t$  e, então, encontrar os locais de maiores erros nas estimativas.

#### Estimativa do Perfil 5

Este perfil é constante em  $x$ ,  $y$  e  $t$ . A figura 5.85 apresenta o comportamento em  $y$  e em  $t$ , fixando uma posição no eixo  $x$ .

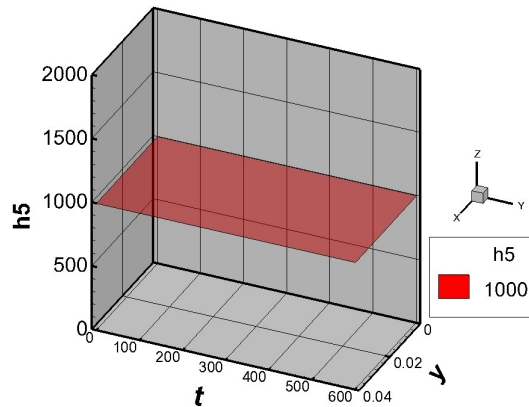


Figura 5.85: Condutância Térmica de Contato - Perfil 5

Para realizar a estimativa deste perfil, foi utilizada 1 função na direção  $x$ , 1 função na direção  $y$  e 15 funções na direção  $t$ , isto é,  $\psi_{15} = \psi_x^1 \times \psi_y^1 \times \psi_t^{15}$ , pois o interesse

nesta abordagem é a recuperação do perfil no tempo. Como este perfil é constante, bastaria 1 função em cada direção. Note que, para realizar uma estimativa com 15 funções em cada direção, tem-se  $\psi_{3375} = \psi_x^{15} \times \psi_y^{15} \times \psi_t^{15}$ , o que significa uma matriz de  $3375 \times 3375$  onde cada elemento é uma integral tripla que deve ser calculada, resultando em um esforço e em um tempo computacional muito maiores.

Para apresentar a estimativa, são fixadas 3 posições no eixo  $x$  e, então, apresenta-se a variação em  $y$  e em  $t$ . As posições em  $x$  são: 0.01, 0.02 e 0.03.

A figura 5.86 apresenta a estimativa da condutância térmica de contato - perfil 5, nas 3 posições fixadas de  $x$ , sem considerar ruído nas medidas. Note que nas 3 posições a estimativa é exatamente a mesma. Pode-se observar oscilações muito grandes no início e no final da estimativa no tempo. Apesar desses erros nas extremidades, a estimativa consegue recuperar bem o perfil exato. Note que de 50 a 550 segundos, as estimativas estão oscilando em torno do valor exato que é  $h = 1000$ .

Para a realização dessa estimativa de 600 segundos foi necessário um tempo computacional de 244.10 segundos, um tempo extremamente baixo para uma estimativa bidimensional transiente.

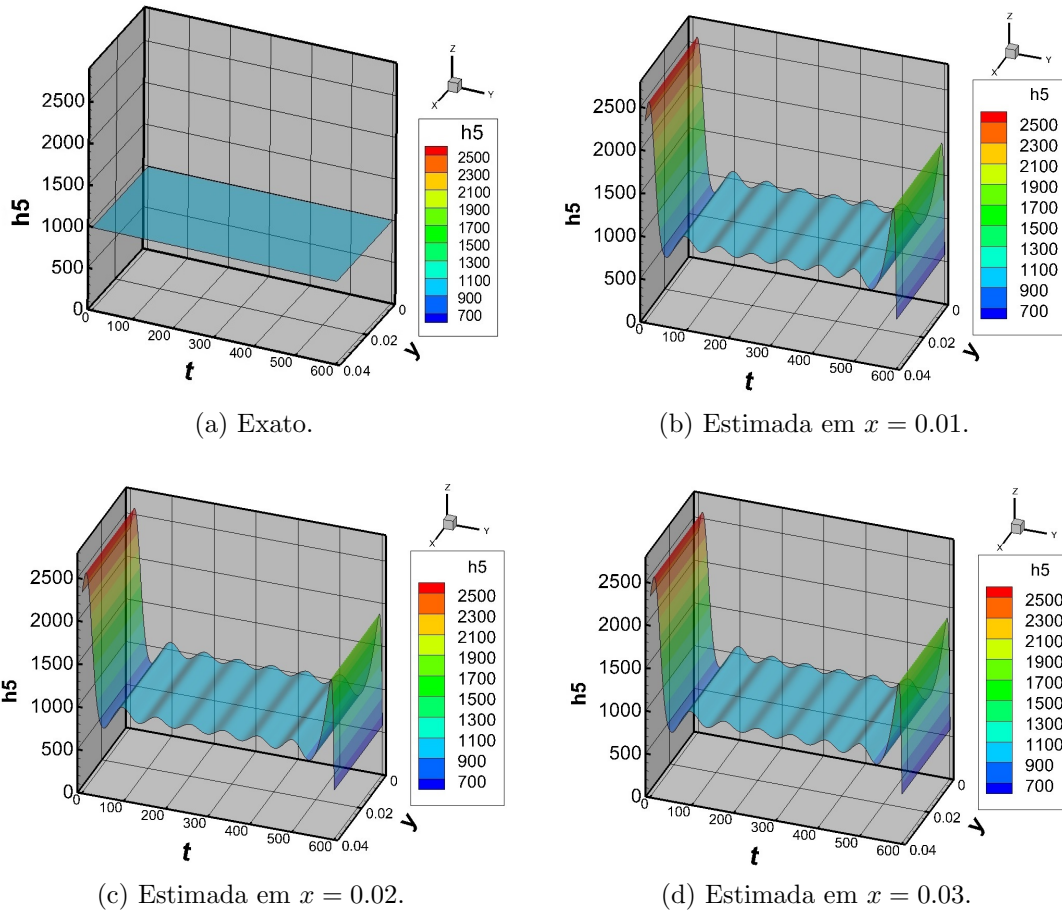


Figura 5.86: Condutância térmica de contato ( $\text{W/m}^2\text{C}$ ) - Perfil 5 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$

A figura 5.87 apresenta o erro entre o perfil exato e estimado da condutância

térmica de contato calculado através da Eq. (5.13).

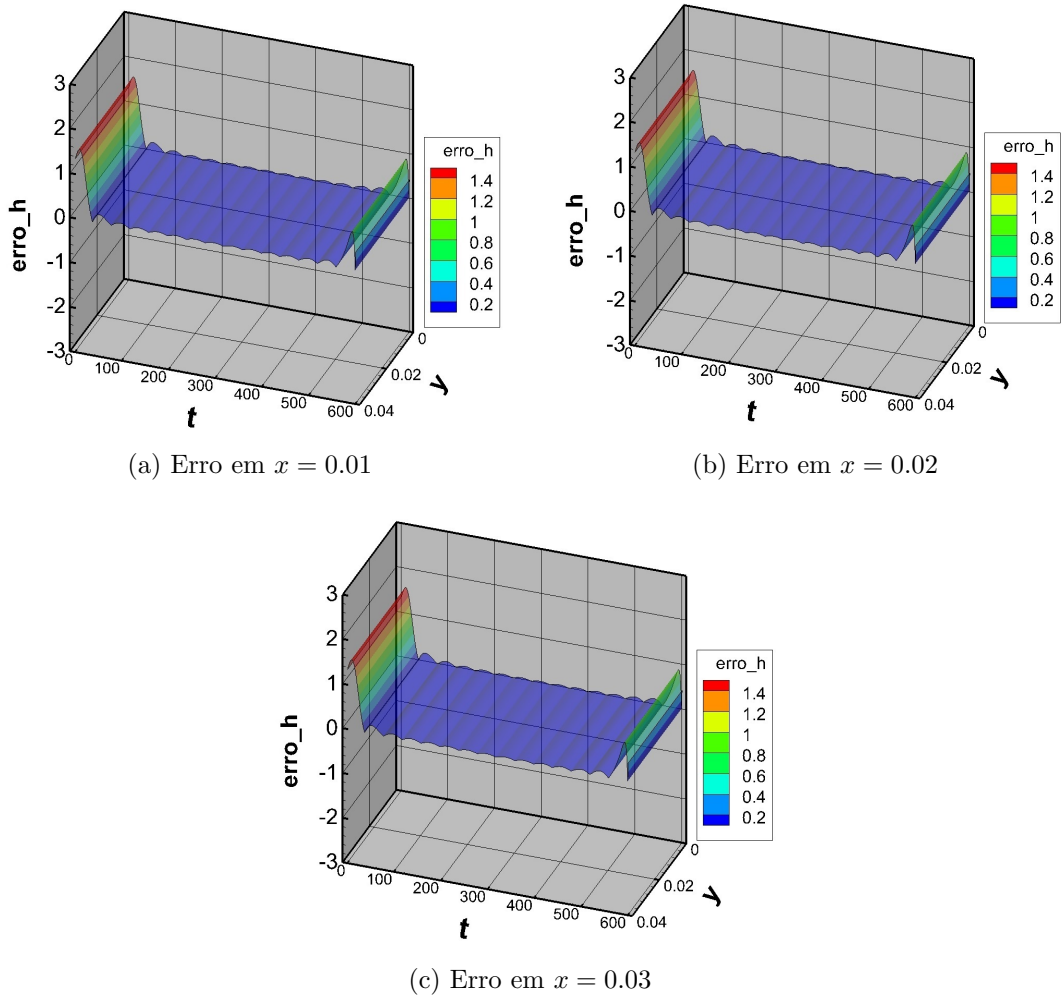


Figura 5.87: Erro - Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{°C}$ ) - Perfil 5 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$

Nota-se que os maiores erros estão no início e no final das estimativas. Diferentes investigações foram realizadas para encontrar a causa desses erros, porém sem sucesso.

Acrescentando ruído nas medidas, com  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ , tem-se as estimativas nas posições  $x = 0.01$ ,  $x = 0.02$  e  $x = 0.03$  apresentadas nas figuras 5.88b, 5.88c e 5.88d, respectivamente. Note que as estimativas são muito semelhantes às estimativas sem ruído nas medidas (ver figura 5.86).

A figura 5.89 apresenta o erro absoluto entre as estimativas sem e com ruído nas medidas apresentadas nas figuras 5.86c e 5.88c, respectivamente. Note que as estimativas são diferentes mas muito próximas entre si, com erros absolutos menores que 0.05. Deve-se ressaltar que, neste caso, o mal condicionamento da matriz não amplificou os erros experimentais de forma acentuada e, por este motivo, os sistemas foram resolvidos com o método LU.

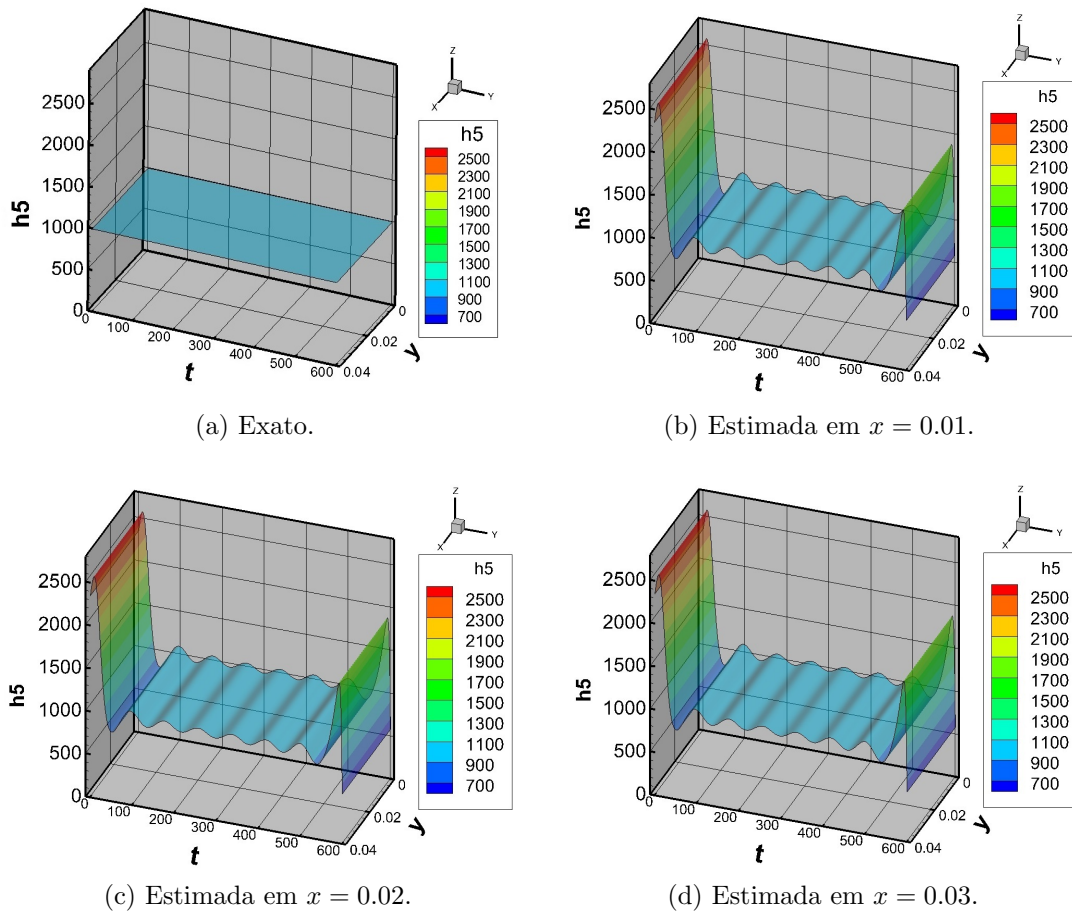


Figura 5.88: Condutância térmica de contato ( $\text{W/m}^2\text{C}$ ) - Perfil 5 -  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$

Para a realização dessa estimativa de 600 segundos foi necessário um tempo computacional de 229.43 segundos.

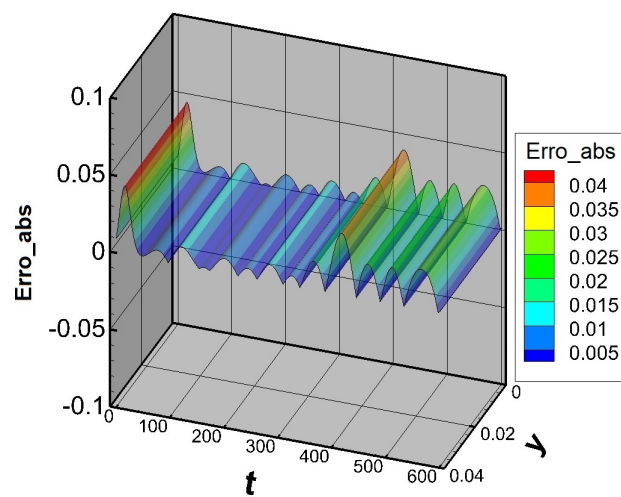


Figura 5.89: Erro Absoluto entre as estimativas 5.86c e 5.88c

## Estimativa do Perfil 6

O perfil 6 é constante em  $x$  e  $y$  com variação no tempo. A figura 5.90 apresenta o comportamento em  $y$  e em  $t$ , fixando uma posição no eixo  $x$ .

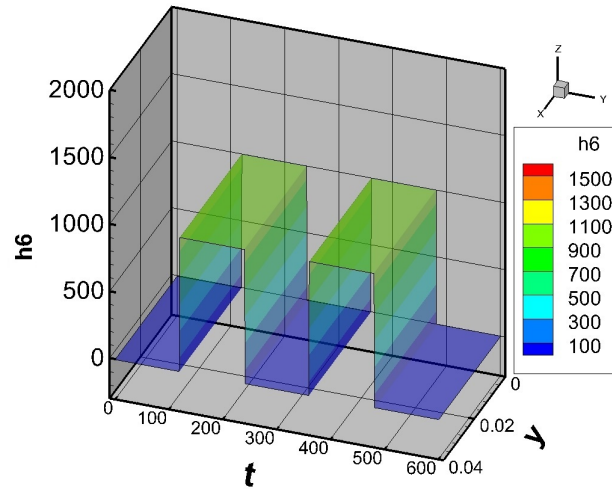


Figura 5.90: Condutância Térmica de Contato - Perfil 6

Para realizar a estimativa deste perfil, foi utilizada 1 função na direção  $x$ , 1 função na direção  $y$  e 15 funções na direção  $t$ , isto é,  $\psi_{15} = \psi_x^1 \times \psi_y^1 \times \psi_t^{15}$ .

A figura 5.91 apresenta a estimativa da condutância térmica de contato para o perfil 6 do caso transiente sem ruído nas medidas nas 3 posições de  $x$  já especificadas anteriormente. Note que a estimativa consegue recuperar a descontinuidade no tempo, embora as oscilações no início e no final da estimativa continuem presentes neste perfil. Para a realização da estimativa foram necessários 327.89 segundos.

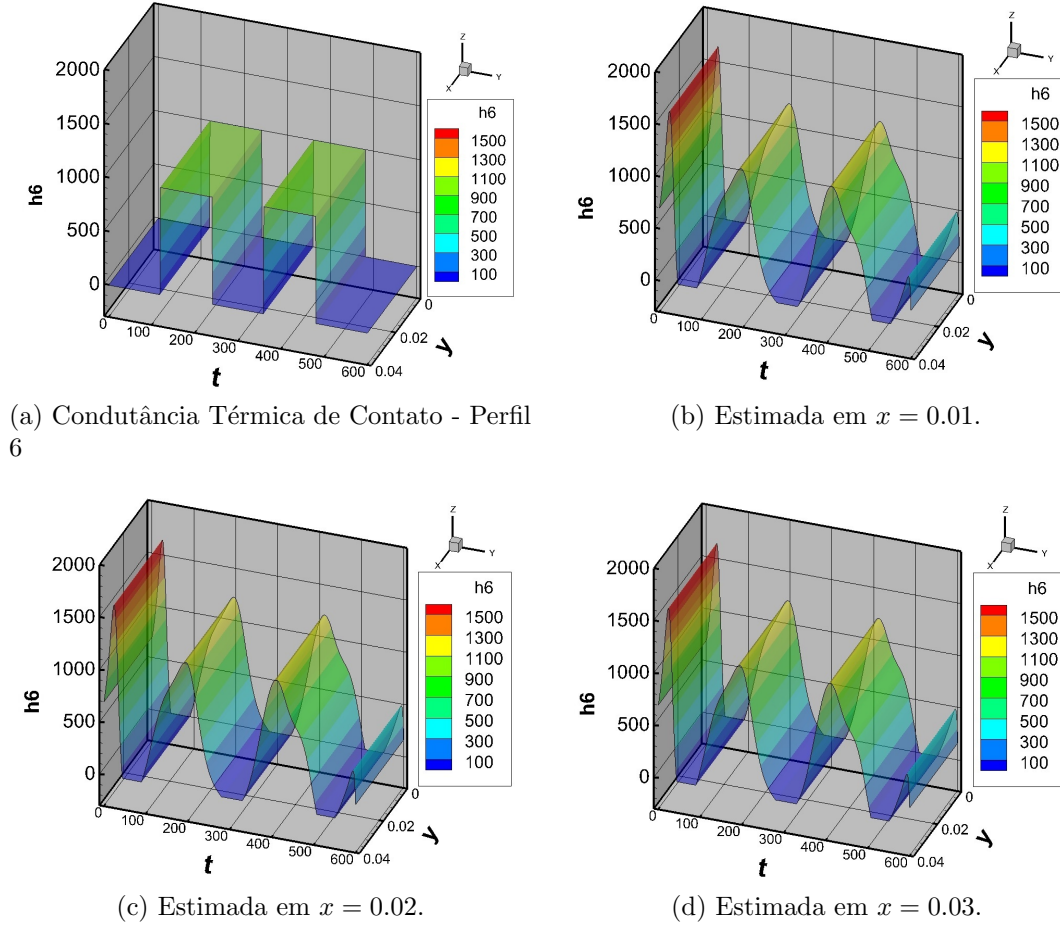
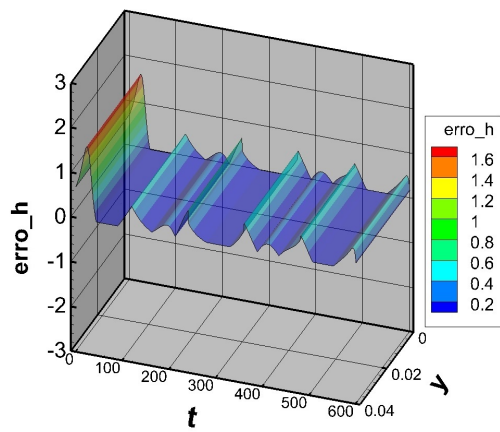


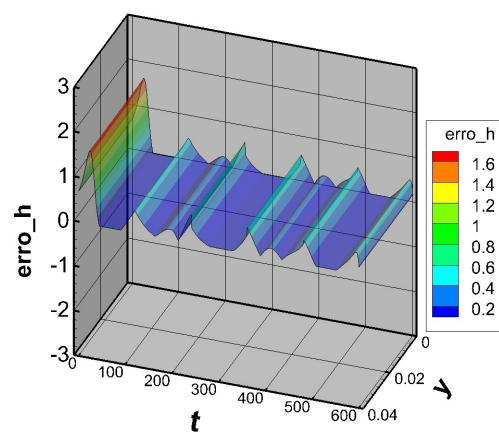
Figura 5.91: Condutância térmica de contato ( $\text{W/m}^2\text{°C}$ ) - Perfil 6 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$

A figura 5.92 apresenta o erro entre o perfil exato e estimado da condutância térmica de contato calculado através da Eq. (5.13). Note que os maiores erros ocorrem nas extremidades da estimativa e nas descontinuidades, o que era esperado.

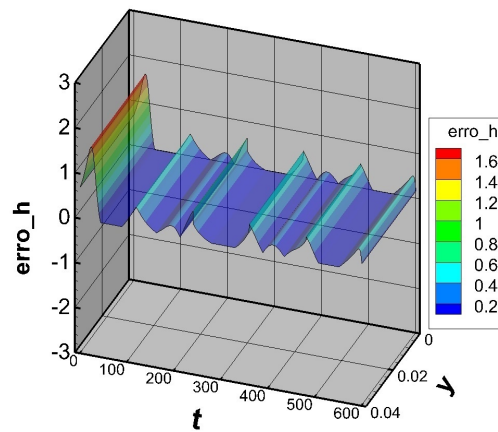
A figura 5.93 apresenta a estimativa da condutância térmica de contato com  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$  nas posições  $x = 0.01$ ,  $x = 0.02$  e  $x = 0.03$ . Novamente, não foi necessária a regularização do sistema ao acrescentar o ruído nas medidas. Note que as estimativas são muito semelhantes às estimativas sem ruído nas medidas (ver figura 5.91). Isto pode ser comprovado ao verificar a figura 5.94 que apresenta o erro absoluto entre as estimativas com e sem erro nas medidas. O tempo computacional para esta estimativa foi de 318.21 segundos.



(a) Erro em  $x = 0.01$



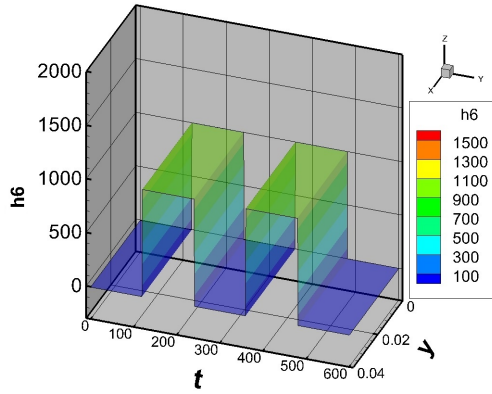
(b) Erro em  $x = 0.02$



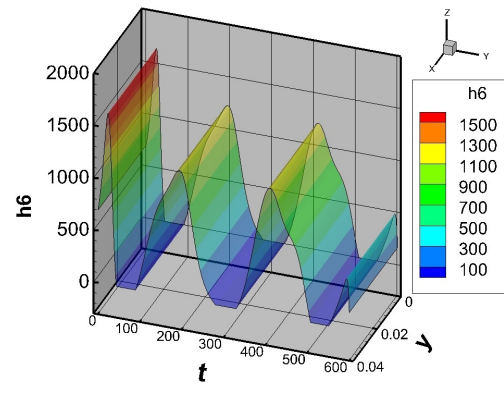
(c) Erro em  $x = 0.03$

Figura 5.92: Erro - Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 6 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$

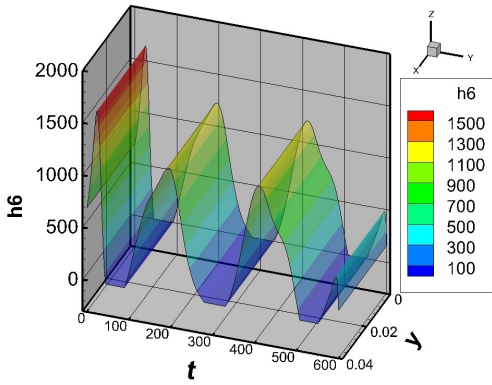




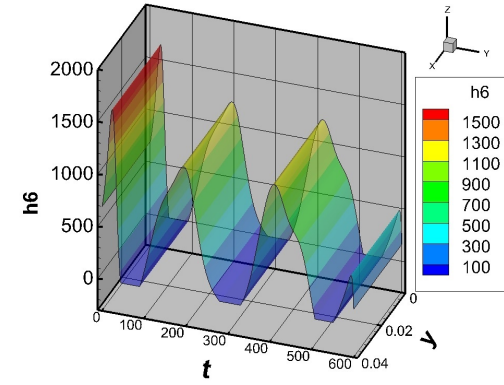
(a) Condutância Térmica de Contato - Perfil 6



(b) Estimada em  $x = 0.01$ .



(c) Estimada em  $x = 0.02$ .



(d) Estimada em  $x = 0.03$ .

Figura 5.93: Condutância térmica de contato ( $\text{W/m}^2\text{C}$ ) - Perfil 6 -  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$

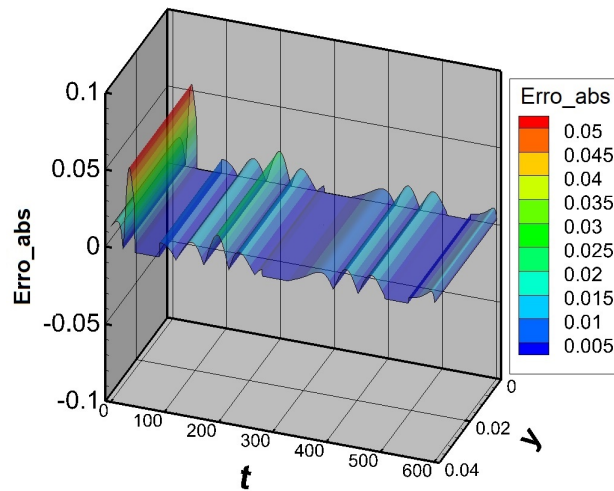


Figura 5.94: Erro Absoluto entre as estimativas 5.91c e 5.93c

Analisando todos os casos estudados, pode-se observar que:

- Todas as estimativas estão em boa concordância com o perfil exato, até mesmo o caso com perfil descontínuo e com ruído nas medidas;
- Todos os sistemas lineares foram resolvidos utilizando o método LU, uma vez que o mal condicionamento da matriz não foi capaz de amplificar de forma perceptível o ruído nas medidas;
- As estimativas com e sem ruído estão muito próximas entre si. Isto foi observado ao calcular o erro absoluto entre essas estimativas;
- Os erros no início e no final das estimativas necessitam de mais investigações;
- Devido à dificuldade de estimar um perfil transiente descontínuo, pode-se considerar que os resultados obtidos são de grande relevância.

## 5.4 Estimativa do Fluxo de Calor

Como dito anteriormente, em um caso real pode ser necessário estimar o fluxo de calor aplicado na superfície superior do material. Considera-se um material de uma camada com as seguintes dimensões: largura e comprimento igual a 0.04 m (ou seja,  $a = b = 0.04$  m) e a altura igual a 0.01 m (ou seja,  $c = 0.01$  m), submetido às seguintes condições de contorno: fluxo de calor transiente aplicado na superfície superior  $\Gamma_0$ , temperatura prescrita na superfície inferior  $\Gamma_\infty$  e as laterais  $\Gamma_1$  isoladas termicamente, como pode ser visto na figura (5.95).

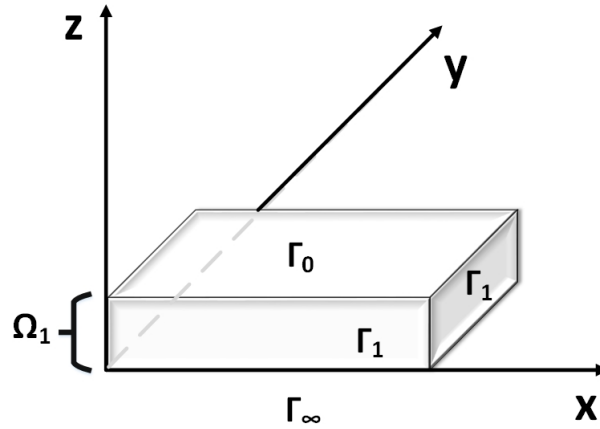


Figura 5.95: Geometria tridimensional.

Como o fluxo de calor é considerado o mesmo em toda superfície superior, isto é, no plano  $xy$  e as superfícies laterais do material são termicamente isoladas, este problema tridimensional pode ser reduzido a um problema unidimensional transiente de transferência de calor. A geometria é apresentada na figura 5.96 e a formulação matemática é dada pelas Eqs. (5.14a) - (5.14d).

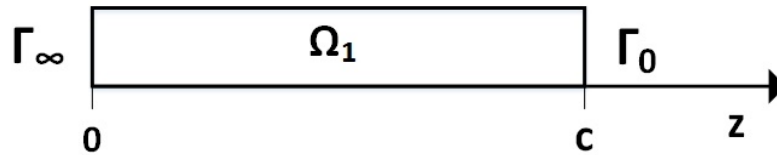


Figura 5.96: Geometria unidimensional.

$$\frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = \nabla^2 T_1 \quad \text{em } \Omega_1, \quad t > 0 \quad (5.14a)$$

$$-\kappa_1 \frac{\partial T_1}{\partial \mathbf{n}_1} = q(t) \quad \text{em } \Gamma_0, \quad t > 0 \quad (5.14b)$$

$$T_1 = 0 \quad \text{em } \Gamma_\infty, \quad t > 0 \quad (5.14c)$$

$$T_1 = 0 \quad \text{em } \Omega_1, \quad t = 0 \quad (5.14d)$$

A estimativa do fluxo de calor transiente foi realizada através do Filtro de Kalman. As hipóteses necessárias para sua utilização e a formulação matemática deste método foram apresentadas na seção 4.5. O modelo de evolução-observação para este caso foi desenvolvido utilizando a discretização do problema apresentado nas Eqs. (5.14a) - (5.14d), através do método das diferenças finitas com um esquema explícito simples. Portanto, neste caso, o vetor de estados contém os valores de temperatura, ao longo da malha usada para resolver o problema de transferência de calor unidimensional, além do valor do fluxo de calor, que também é considerado como uma variável de estado. Já a observação é composta do valor de temperatura observado em  $\Gamma_0$ .

A fim de garantir a convergência e satisfazer o critério de estabilidade, foi considerado um experimento numérico com duração de 600 segundos e passo no tempo  $dt = 7.5 \times 10^{-4}$ s. Foram utilizados 60 nós na direção  $z$ , resultando em  $dz = 1.667 \times 10^{-4}$ m.

O aço (AISI 1050) foi o material utilizado no domínio  $\Omega_1$ , onde  $\kappa_1 = 54\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$  e  $\alpha_1 = 1.474 \times 10^{-5}\text{m}^2/\text{s}$  e o fluxo de calor transiente é apresentado na figura 5.97.

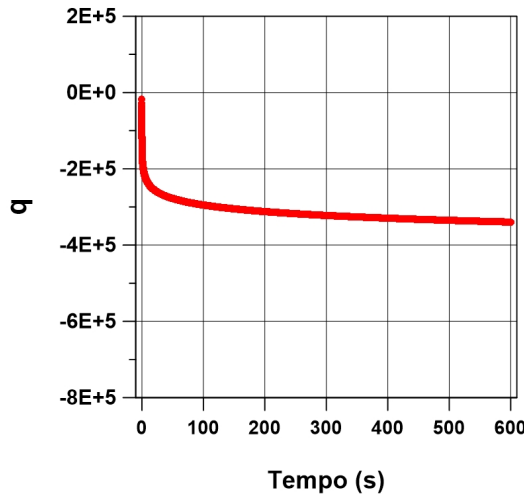


Figura 5.97: Fluxo de calor transiente exato.

A figura 5.98 apresenta a estimativa do fluxo de calor sem considerar ruído nas

medidas, isto é,  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  assim como, a estimativa da temperatura na superfície superior e o resíduo. Note que o fluxo é perfeitamente estimado, como pode ser visto na figura 5.98a, onde o intervalo de confiança contém todos os pontos da função estimada.

A temperatura na superfície superior do material, em todos os tempos, também é perfeitamente estimada, como pode ser visto na figura 5.98b. Observe que o resíduo é muito pequeno e oscila em torno do zero, mostrando a qualidade da estimativa (ver figura 5.98c).

Para a realização da estimativa, foi considerado que o vetor de estados foi modelado com os desvios-padrão  $\sigma_t = 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$  e  $\sigma_q = 8 \times 10^3 \text{ W/m}^2$ .

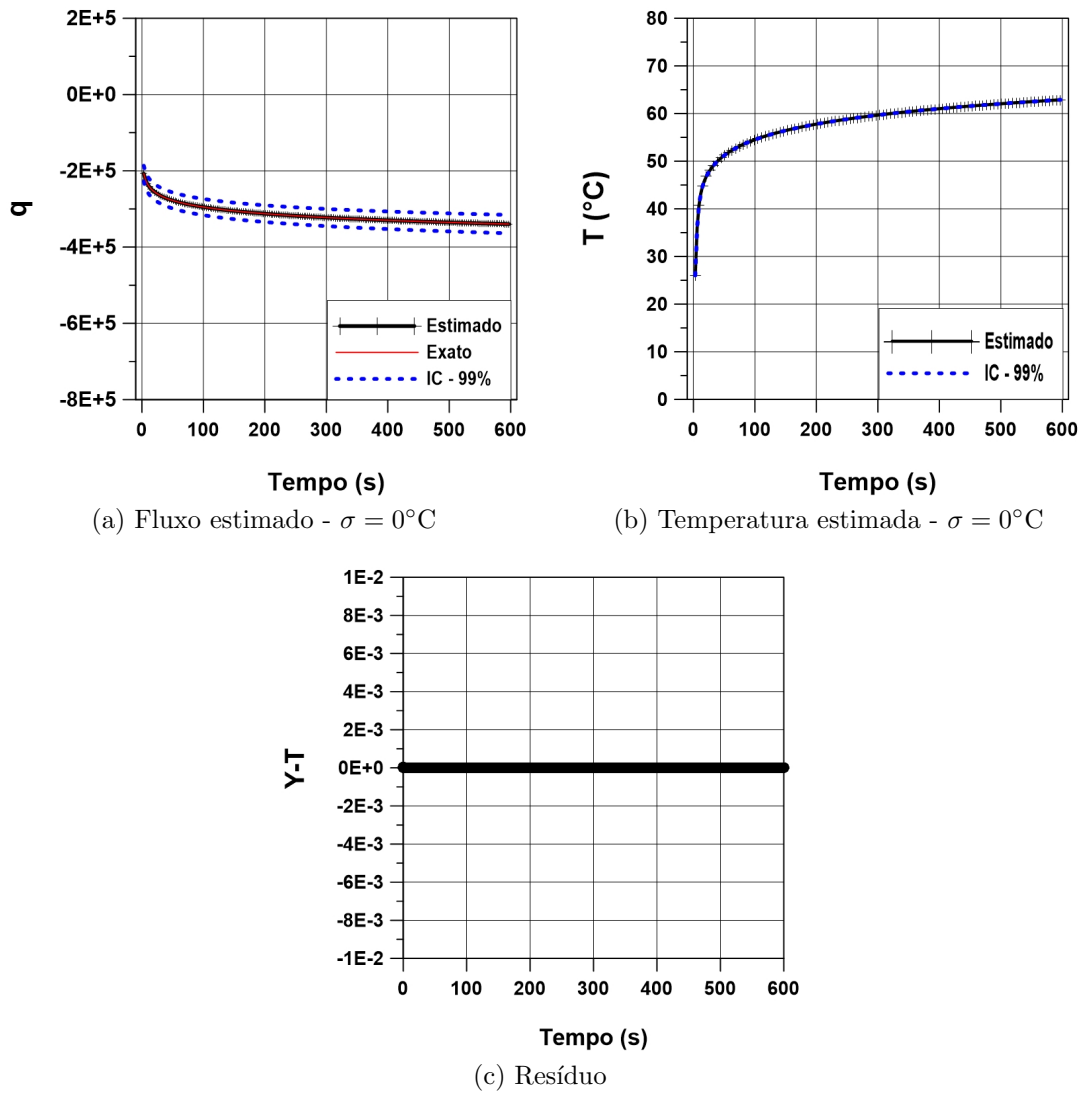


Figura 5.98: Estimativa fluxo de calor -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$

A figura 5.99 apresenta a estimativa do fluxo de calor acrescentando ruído nas medidas com  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ , a estimativa da temperatura na superfície superior e o resíduo. Analisando a figura 5.99a pode-se notar que, apesar das oscilações, o fluxo

de calor é bem estimado e oscila ao redor da função exata.

Comparando as figuras 5.98a e 5.99a pode-se notar que o intervalo de confiança no caso com ruído nas medidas é maior, o que é coerente devido à incerteza acrescentada nas observações.

A temperatura na superfície superior foi perfeitamente estimada, como pode ser visto na figura 5.99b. Analisando a figura 5.99c nota-se que o resíduo oscila em torno do zero e está na mesma ordem de grandeza do desvio-padrão das medidas, isto é,  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ . Mostrando com isso a qualidade do resultado, visto que, mesmo acrescentando ruído nas medidas é possível obter uma boa estimativa da função fluxo de calor.

Para a realização da estimativa, foi considerado que o vetor de estados foi modelado com os desvios-padrão  $\sigma_t = 5 \times 10^{-3}^\circ\text{C}$  e  $\sigma_q = 5 \times 10^2 \text{ W/m}^2$ .

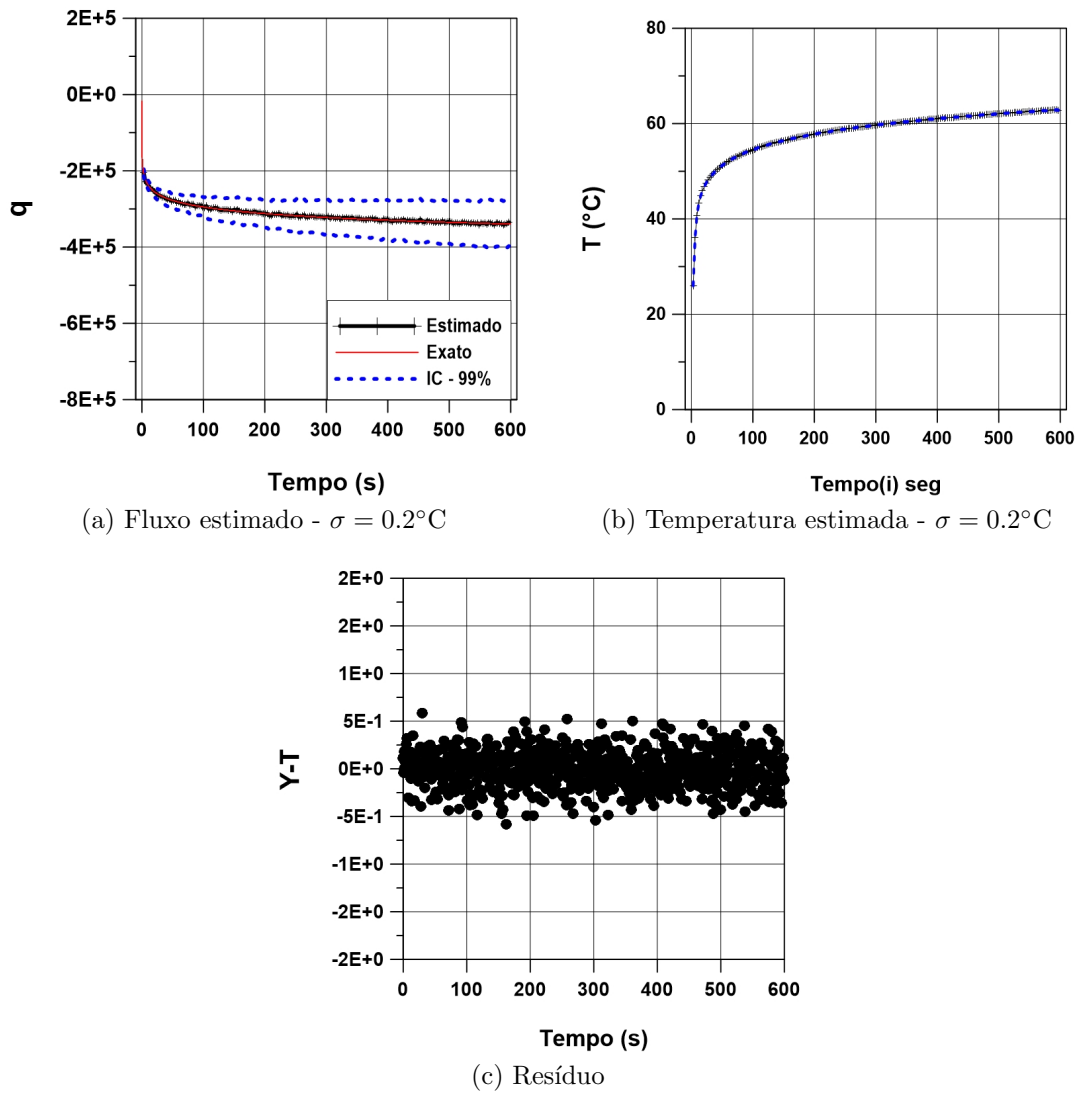


Figura 5.99: Estimativa fluxo de calor -  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$

# Capítulo 6

## Conclusões e Trabalhos Futuros

Nesta tese foram apresentadas quatro metodologias baseadas no Funcional de Reciprocidade. Para a realização da estimativa em todas as metodologias apresentadas deve-se:

- Determinar a base ortonormal e o número de funções na base, a qual é necessária nos problemas auxiliares;
- Resolver dois problemas auxiliares (regime permanente ou transiente) correspondentes ao salto de temperatura e ao fluxo de calor na interface;
- Determinar o modo de solução dos sistemas lineares decorrentes da aplicação das metodologias.

A base ortonormal escolhida foi a base de Fourier, que apresentou os melhores resultados nos testes numéricos realizados com diferentes bases ortonormais. O número de funções na base ortonormal é um fator importante e foi definido através de testes numéricos com medidas de temperatura sem ruído e usando a função da condutância térmica de contato exata como comparação. Em um caso real, não se deseja que as análises dependam do perfil exato, mas isso se torna razoável uma vez que ao fazer experimentos reais é necessário, muitas vezes, realizar experimentos numéricos previamente. Em todos os casos estudados, notou-se que 15 funções levava a estimativas com erros baixos. Por este motivo, foi o número de funções escolhido para todas as estimativas. Deve-se ressaltar que, caso o perfil a ser estimado seja constante, pode-se usar 1 função em cada direção, como foi mostrado na abordagem 1 com o caso constante e na abordagem 3 onde os perfis eram constantes nas direções  $x$  e  $y$  e, por este motivo, foi utilizada 1 função em cada uma dessas direções.

Os problemas auxiliares são criados para que, ao relacioná-los com a formulação do problema direto, seja possível calcular o Funcional de Reciprocidade. Os problemas auxiliares não foram criados neste trabalho, somente estendidos para três dimensões. Estes problemas podem ser resolvidos uma única vez, caso não haja

mudança das dimensões ou tipo dos materiais em contato. Com isso, a solução desses problemas auxiliares é considerada uma etapa de pré-processamento. Deve-se ressaltar que os problemas auxiliares não dependem do problema direto mas, mesmo não havendo crime inverso [1], foram utilizadas malhas distintas para a solução dos problemas auxiliares e direto. Estes problemas devem possuir a mesma geometria e as mesmas propriedades térmicas.

Após a definição do número de funções e da solução dos problemas auxiliares, calcula-se o Funcional de Reciprocidade e deve-se definir o modo de solução dos sistemas lineares decorrentes da aplicação das metodologias. O método LU foi utilizado nos casos sem ruído nas medidas da abordagem 1 e 2 e em todos os casos da abordagem 3. Já para os casos com ruído nas medidas da abordagem 1 e 2, foi utilizado o método TSVD, que depende da definição do parâmetro de truncamento. Este parâmetro é difícil de ser determinado uma vez que não há método determinístico para sua especificação. Em um caso real, não seria possível determinar este parâmetro previamente, uma vez que para cada fluxo de calor aplicado na superfície, material utilizado nas amostras e perfil de condutância térmica de contato, são geradas medidas de temperaturas diferentes e, conseqüentemente, obtém-se sistemas lineares distintos. Portanto, há um parâmetro de truncamento ideal para cada caso. Por este motivo, neste trabalho, foi apresentado um procedimento novo de escolha do parâmetro de truncamento que não depende da condutância térmica de contato exata, o que possibilitou a realização das estimativas.

Na abordagem 1 foram utilizadas medidas de temperatura em regime permanente para realizar a estimativa bidimensional da condutância térmica de contato sem variação temporal. Nesta abordagem, todos os resultados obtidos sem ruído nas medidas apresentaram ótima concordância com o perfil exato, até mesmo os casos com perfis descontínuos. Ao acrescentar ruído nas medidas as estimativas pioraram, o que era esperado, uma vez que o caráter mal posto do problema se acentua. Um dos fatores que influenciaram na qualidade das estimativas com ruído nas medidas foi a escolha do parâmetro de truncamento.

A qualidade da estimativa também depende da função que está sendo estimada e também da sua magnitude. Percebeu-se que perfis suaves e com valores menores são mais fáceis de serem estimados. O acréscimo de descontinuidades na função também piorou as estimativas. Notou-se ainda que a configuração dos materiais também interferem nas estimativas. A configuração 3, onde o material superior possui condutividade térmica maior que o material inferior, apresentou os resultados mais instáveis.

Mesmo com a deterioração dos resultados ao acrescentar incertezas nas medidas, pode-se considerar que os resultados estavam em boa concordância com o perfil exato, visto a dificuldade para estimar perfis bidimensionais de condutância térmica



de contato. Os resultados obtidos neste trabalho representam um avanço com relação aos resultados encontrados na literatura, visto que essa abordagem é não intrusiva, estima perfis bidimensionais de condutância térmica de contato e com baixíssimo tempo computacional.

A escolha do parâmetro de truncamento sem a necessidade do perfil exato da condutância térmica de contato possibilitou a utilização da abordagem 1 na estimativa da condutância térmica de contato em um caso real, como pôde ser visto na seção 5.1, mostrando com isso que a metodologia é promissora e pode ser empregada em casos reais de estimativa de condutância térmica de contato ou em casos de identificação de falhas em materiais compósitos.

Na abordagem 2, duas metodologias foram apresentadas para realizar a estimativa bidimensional da condutância térmica de contato sem variação temporal utilizando medidas de temperatura transientes. As metodologias se diferenciaram no tempo computacional, visto que a metodologia 2 não necessita da solução do problema direto durante a estimativa e, por este motivo, apresentou um tempo computacional muito menor. Com relação à qualidade dos resultados, as metodologias apresentaram resultados semelhantes quando 300 medidas de temperatura, ou mais, são utilizadas na estimativa.

Nesta abordagem não foram realizadas análises para determinar o número de funções e nem para determinação do parâmetro de truncamento. Foram utilizadas 15 funções em cada direção para a realização da estimativa e, para o parâmetro de truncamento, foram utilizados os valores obtidos na abordagem 1, uma vez que essa análise já havia sido realizada para esses perfis na abordagem 1. Caso houvesse necessidade de escolher o parâmetro de truncamento para a abordagem 2, isto poderia ser realizado utilizando as medidas de temperatura obtidas no último tempo de experimento. Em análises realizadas para determinar quantas medidas de temperatura são necessárias para uma boa estimativa, verificou-se que, analisando a convergência da estimativa com relação ao tempo, é possível obter esse número de medidas sem a necessidade do conhecimento do perfil exato. Pode-se concluir que a metodologia 2 é melhor do que a 1, visto que ambas apresentam resultados próximos mas a metodologia 2 apresentou um tempo computacional muito menor.

Na abordagem 3 foi realizada a estimativa bidimensional com variação temporal da condutância térmica de contato utilizando medidas de temperatura transientes. As estimativas estavam em ótima concordância com o perfil exato e não apresentaram mudança significativa com a adição de ruído nas medidas. Em análises realizadas, notou-se que o termo que acompanha as medidas de temperatura no Funcional de Reciprocidade é bem menor do que o termo que acompanha o fluxo de calor. Logo, ao acrescentar ruído nas medidas, não há uma alteração relevante no valor do Funcional de Reciprocidade e, portanto, não há grande variação no sistema a ser

resolvido.

Por fim, foi realizado a estimativa de um fluxo de calor utilizando o Filtro de Kalman. Notou-se que o fluxo de calor unidimensional e transiente pode ser perfeitamente estimado através do Filtro de Kalman até mesmo com a adição de ruídos nas medidas.

Conclui-se que os resultados apresentados nesta tese são de grande relevância. O tempo computacional necessário para realização das estimativas é baixíssimo quando comparado com técnicas tradicionais como o método MCMC ou baseados em regularização. Com isso, os resultados obtidos com o Funcional de Reciprocidade podem vir a ser usados como informação a priori para outras técnicas com o objetivo de melhorar as estimativas obtidas e diminuir o tempo computacional das técnicas tradicionais.

Com base no que foi apresentado nesta tese propõem-se como etapas futuras ou investigações para pesquisas nesta área, os seguintes estudos:

- Investigar a utilização de outras bases de funções ortonormais;
- Investigar a relação do truncamento dos valores singulares com o número de funções na base ortonormal e, conseqüentemente, ter um critério para a escolha do número ideal de funções que não utilize a condutância térmica de contato exata;
- Investigar a relação entre a configuração dos materiais utilizados nas amostras e a qualidade dos resultados;
- Verificar o método do Funcional de Reciprocidade com outros métodos de estimativa de condutância térmica de contato presentes na literatura;
- Considerar possíveis incertezas na modelagem do problema direto, como por exemplo, nas condições de contorno;
- Resolver os problemas auxiliares bidimensionais em regime permanente e transiente através de uma técnica analítica;
- Realizar a validação da abordagem 2;
- Estimar perfis com variação em  $x$ ,  $y$  e  $t$  utilizando a abordagem 3, visto que só foram realizadas estimativas com variação temporal mas constantes em  $x$  e  $y$ ;
- Realizar a estimativa de fluxo de calor através de uma abordagem utilizando o Funcional de Reciprocidade.

# Referências Bibliográficas

- [1] KAIPPIO, J., SOMERSALO, E. *Statistical and Computational Inverse Problems*. New York, Springer-Verlag, Inc., 2004.
- [2] ABREU, L. A. S. *Identificação de Falhas de Contato em Compósitos Laminados*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, 2014.
- [3] ÖZISIK, M. N. *Heat Transfer: A Basic Approach*. New York, McGraw-Hill, Inc., 1985.
- [4] ÇENGEL, Y. A. *Heat Transfer: A Practical Approach*. 2 ed. New York, McGraw-Hill, 2003.
- [5] INCROPERA, F. P., DEWITT, D. P., BERGMAN, T. L., et al. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. 6 ed. USA, John Wiley & Sons, Inc., 2007.
- [6] LIENHARD IV, J. H., LIENHARD V, J. H. *A Heat Transfer Textbook*. 3 ed. Cambridge, Massachusetts, USA, Phlogiston Press, 2004.
- [7] COOPER, M. G., MIKIC, B. B., YOVANOVICH, M. M. “Thermal Contact Conductance”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 12, pp. 279–300, 1969.
- [8] MILOŠEVIĆ, N., RAYNAUD, M., MAGLIĆ, K. “Estimation of Thermal Contact Resistance Between the Materials of Double-Layer Sample Using the Laser Flash Method”, *Inverse Problems in Engineering*, v. 10, n. 1, pp. 85–103, 2002.
- [9] GRUJICIC, M., ZHAO, C. L., DUSEL, E. C. “The Effect of Thermal Contact Resistance on Heat Management in the Electronic Packaging”, *Applied Surface Science*, v. 246, pp. 290–302, 2005.
- [10] YOVANOVICH, M. M. “Four Decades of Research on Thermal Contact, Gap, and Joint Resistance in Microelectronics”, *IEEE Transactions on Components and Packaging Technologies*, v. 28, n. 2, pp. 182–206, 2005.

- [11] HUANG, C.-H., JU, T.-M. “An Inverse Problem of Simultaneously Estimating Contact Conductance and Heat Transfer Coefficient of Exhaust Gases Between Engine’s Exhaust Valve and Seat”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 38, n. 5, pp. 735–754, 1995.
- [12] MCWAID, T. H., MARSCHALL, E. “Application of the Modified Greenwood and Williamson Contact Model for the Prediction of Thermal Contact Resistance”, *Wear*, v. 152, pp. 263–277, 1992.
- [13] ROSOCHOWSKA, M., CHODNIKIEWICZ, K., BALENDRA, R. “A New Method of Measuring Thermal Contact Conductance”, *Journal of Materials Processing Technology*, v. 145, pp. 207–214, 2004.
- [14] LIU, D., LUO, Y., SHANG, X. “Experimental Investigation of High Temperature Thermal Contact Resistance Between High Thermal Conductivity C/C Material and Inconel 600”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 80, pp. 407–410, 2015.
- [15] GILL, J., DIVO, E., KASSAB, A. J. “Estimating Thermal Contact Resistance Using Sensitivity Analysis and Regularization”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 33, pp. 54–62, 2009.
- [16] TIKHONOV, A. N., ARSENIN, V. Y. *Solution of Ill-Posed Problems*. Washington, D.C., V.H. Winston & Sons, 1977.
- [17] BECK, J. V., BLACKWELL, B., ST.CLAIR JR., C. R. *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1985.
- [18] ALIFANOV, O. M. *Inverse Heat Transfer Problems*. New York, Springer, 1994.
- [19] ÖZISIK, M. N., ORLANDE, H. R. B. *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*. New York, Taylor & Francis, 2000.
- [20] ANDRIEUX, S., ABDA, A. B. “The Reciprocity Gap: A General Concept for Flaws Identification Problems”, *Mechanics Research Communications*, v. 20, n. 5, pp. 415–420, 1993.
- [21] COLAÇO, M. J., ALVES, C. J. S. “A Fast Non-Intrusive Method for Estimating Spatial Thermal Contact Conductance by Means of the Reciprocity Functional Approach and the Method of Fundamental Solutions”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 60, pp. 653–663, 2013.
- [22] ABREU, L. A. S., ALVES, C. J. S., COLAÇO, M. J., et al. “A Non-Intrusive Inverse Problem Technique for the Identification of Contact Failures in

- Double-Layered Composites”. In: *Proceedings of the 15th International Heat Transfer Conference*, Kyoto, Japan, 2014.
- [23] COLAÇO, M. J., ALVES, C. J. S., ORLANDE, H. R. B. “Transient Non-Intrusive Method for Estimating Spatial Thermal Contact Conductance by Means of the Reciprocity Functional Approach and the Method of Fundamental Solutions”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 23, n. 4, pp. 688–717, 2015.
- [24] COLAÇO, M. J., ALVES, C. J. S. “A Backward Reciprocity Function Approach to the Estimation of Spatial and Transient Thermal Contact Conductance in Double-Layered Materials Using Non-Intrusive Measurements”, *Numerical Heat Transfer, Part A*, v. 68, pp. 117–132, 2015.
- [25] TOUGRI, I., PADILHA, R. S., COLAÇO, M. J. “An Analytical Extension of the Reciprocity Functional Approach to Estimate Thermal Contact Conductances Between Different Materials Using Transient Measurements”. In: *Proceedings of the 16th International Heat Transfer Conference, IHTC-16*, pp. 1–13, Beijing, China, 2018.
- [26] ABREU, L. A. S., COLAÇO, M. J., ORLANDE, H. R. B., et al. “Thermography Detection of Contact Failures in Double Layered Materials Using the Reciprocity Functional Approach”, *Applied Thermal Engineering*, v. 100, pp. 1173–1178, 2016.
- [27] PADILHA, R. S., COLAÇO, M. J., ORLANDE, H. R. B., et al. “An Analytical Method to Estimate Spatially-Varying Thermal Contact Conductances Using the Reciprocity Functional and the Integral Transform Methods: Theory and Experimental Validation”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 100, pp. 599–607, 2016.
- [28] HANSEN, P. C. “The Truncated SVD as a Method for Regularization”, *Numerical Analysis Project*, v. 86-36, 1986.
- [29] PRESS, W. H., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., et al. *Numerical Recipes in Fortran 77*, v. 1. 2 ed. United States of America, Cambridge University Press, 1992.
- [30] RUST, B. W. “Truncating the Singular for Ill-Posed Problems”, *NIST Interagency/Internal Report*, v. 6131, 1998.
- [31] HANSEN, P. C. *Discrete Inverse Problems: Insight and Algorithms*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2010.

- [32] MCADAMS, W. H. *Heat Transmission*. USA, McGraw-Hill Series in Chemical Engineering, 1954.
- [33] MADHUSUDANA, C. V. *Thermal Contact Conductance*. 2 ed. New York, Springer-Verlag New York Inc., 1996.
- [34] SAVIJA, I., CULHAM, J. R., YOVANOVICH, M. M., et al. “Review of Thermal Conductance Models for Joints Incorporating Enhancement Materials”, *Journal of Thermophysics and Heat Transfer*, v. 17, n. 1, 2003.
- [35] WOLFF, E. G., SCHNEIDER, D. A. “Prediction of Thermal Contact Resistance Between Polished Surfaces”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 41, pp. 3469–3482, 1998.
- [36] MAROTTA, E. E., FLETCHER, L. S., DIETZ, T. A. “Thermal Contact Resistance Modeling of Non-Flat , Roughened Surfaces With Non-Metallic Coatings”, *Journal of Heat Transfer*, v. 123, pp. 11–23, 2001.
- [37] KUMAR, S. S., RAMAMURTHI, K. “Thermal Contact Conductance of Pressed Contacts at Low Temperatures”, *Cryogenics*, v. 44, pp. 727–734, 2004.
- [38] FIEBERG, C., KNEER, R. “Determination of Thermal Contact Resistance from Transient Temperature Measurements”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 51, pp. 1017–1023, 2008.
- [39] SHOJAEFARD, M. H., MAZIDI, M. S., MOUSAPOUR, V. K. “The Estimation of Time-Varying Thermal Contact Conductance Between Two Fixed Contacting Surfaces”, *Mechanika*, v. 19, n. 2, pp. 167–171, 2013.
- [40] BURGHOLD, E. M., FREKERS, Y., KNEER, R. “Determination of Time-Dependent Thermal Contact Conductance Through IR-Thermography”, *International Journal of Thermal Sciences*, v. 98, pp. 148–155, 2015.
- [41] TARIQ, A., ASIF, M. “Experimental Investigation of Thermal Contact Conductance for Nominally Flat Metallic Contact”, *Heat and Mass Transfer*, pp. 291–307, 2016.
- [42] DONGMEI, B., HUANXIN, C., SHANJIAN, L., et al. “Measurement of Thermal Diffusivity/Thermal Contact Resistance Using Laser Photothermal Method at Cryogenic Temperatures”, *Applied Thermal Engineering*, v. 111, pp. 768–775, 2017.

- [43] KUMAR, S., TARIQ, A. “Steady State Experimental Investigation of Thermal Contact Conductance Between Curvilinear Contacts Using Liquid Crystal Thermography”, *International Journal of Thermal Sciences*, v. 118, pp. 53–68, 2017.
- [44] ZHANG, P., CUI, T., LI, Q. “Effect of Surface Roughness on Thermal Contact Resistance of Aluminium Alloy”, *Applied Thermal Engineering*, v. 121, pp. 992–998, 2017.
- [45] HADAMARD, J. *Lectures on Cauchy’s Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University, 1923.
- [46] REDDY, J. N. *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. 2 ed. Texas, John Wiley & Sons, INC., 2002.
- [47] ANDRIEUX, S., ABDA, A. B. “Identification of Planar Cracks by Complete Overdetermined Data: Inversion Formulae”, *Inverse Problems*, v. 12, pp. 553–563, 1996.
- [48] BANNOUR, T., ABDA, A. B., JAOUA, M. “A Semi-Explicit Algorithm for the Reconstruction of 3D Planar Cracks”, *Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique*, 1996.
- [49] ABDA, A. B., DELBARY, F., HADDAR, H. “On the Use of the Reciprocity-Gap Functional in Inverse Scattering from Planar Cracks”, *Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique*, 2004.
- [50] COLTON, D., HADDAR, H. “An Application of the Reciprocity Gap Functional to Inverse Scattering Theory”, *Inverse Problems*, v. 21, pp. 383–398, 2005.
- [51] DELBARY, F., ARAMINI, R., BOZZA, G., et al. “On the Use of the Reciprocity Gap Functional in Inverse Scattering with Near-Field Data: An Application to Mammography”, *Journal of Physics: Conference Series*, v. 135, 2008.
- [52] ALVES, C. J. S., ABDALLAH, J. B., JAOUA, M. “Recovery of Cracks Using a Point-Source Reciprocity Gap Function”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 12, n. 5, pp. 519–534, 2004.
- [53] SHIFRIN, E. I., SHUSHPANNIKOV, P. S. “Application of Reciprocity Gap Functional for Elastostatic Inverse Problem of Small Well-Separated Defects Identification”, *Procedia Materials Science*, v. 3, pp. 1105–1110, 2014.

- [54] ÖZISIK, M. N. *Finite Difference Methods in Heat Transfer*. USA, CRC Press, 1994.
- [55] FAIRWEATHER, G., KARAGEORGHIS, A. “The Method of Fundamental Solutions for Elliptic Boundary Value Problems”, *Adv. Comput. Math.*, v. 9, pp. 69–95, 1998.
- [56] CHEN, Z. “Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond VI Sequential Monte Carlo Estimation: Particle Filters”, *Statistics*, v. 182, pp. 1–69, 2003.
- [57] GREWAL, M. S., ANDREWS, A. P. *Kalman Filtering: Theory and Practice Using MATLAB*. 2 ed. New York, John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- [58] SIMON, D. *Optimal State Estimation*. John Wiley & Sons, Inc., 2006.
- [59] *IMSL Fortran Subroutines for Mathematical Applications*. Houston, Texas, Visual Numerics, Inc., 1997.
- [60] BOX, G. E. P., MULLER, M. E. “A Note on the Generation of Random Normal Deviates”, *Ann. Math. Statist.*, v. 29, n. 2, pp. 610–611, 1958.



# Apêndice A

Neste apêndice será apresentada a escolha dos parâmetros de truncamento para os perfis 3 e 4, com as diferentes configurações dos materiais e com os dois níveis de ruído adicionado nas medidas, isto é, para os casos 19 – 24 e 31 – 36 (abordagem 1). Estes parâmetros de truncamento são necessários para a solução dos sistemas lineares mal condicionados decorrentes da aplicação do método do Funcional de Reciprocidade utilizando medidas de temperatura ruidosas. Os erros entre as estimativas do salto de temperatura e entre as estimativas do fluxo de calor foram calculados conforme definido nas Eqs. (5.4) e (5.5) e a escolha do melhor parâmetro de truncamento foi realizada de acordo com o procedimento descrito na seção 5.1.

O perfil 3 será analisado iniciando pelos casos com dois materiais iguais mas com ruídos distintos, isto é, casos 19 e 31 (ver figuras A.1 e A.2, respectivamente). Nestes casos, os parâmetros de truncamento ideais foram os mesmos ao aumentar o ruído nas medidas, isto é, nos sistemas do salto de temperatura, o valor ideal é  $1 \times 10^5$  em ambos os casos e, nos sistemas do fluxo de calor, o valor ideal é  $1 \times 10^{-3}$  também em ambos os casos.

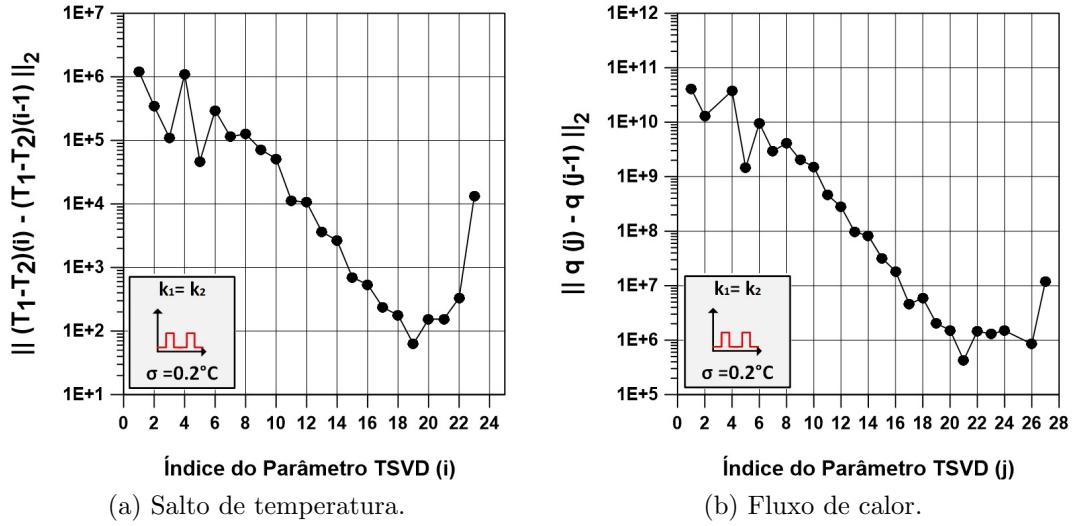


Figura A.1: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 19 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ).

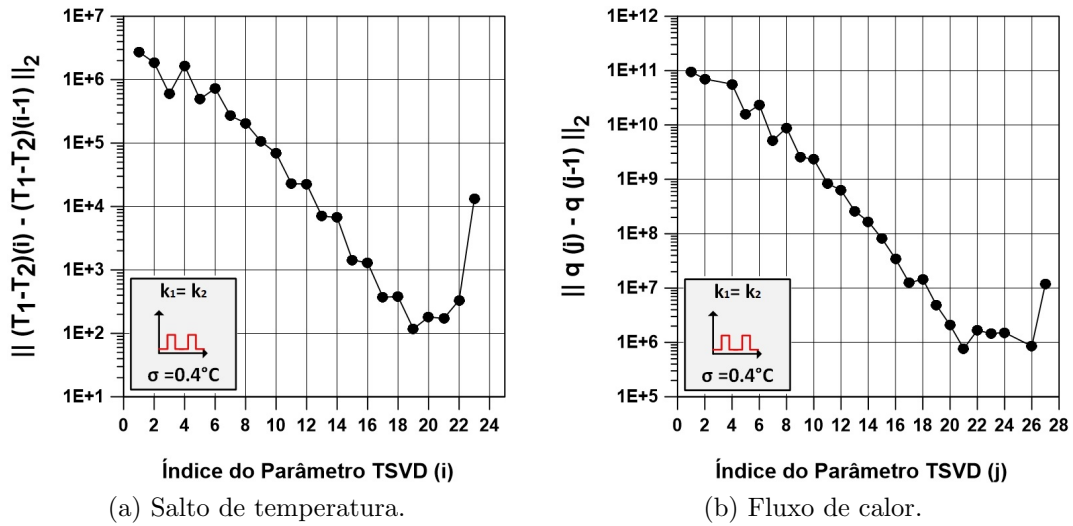


Figura A.2: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 31 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ).

Mantendo o perfil 3 mas mudando a configuração dos materiais (configuração 2), tem-se os casos 20 e 32 (ver figuras A.3 e A.4) onde no caso 20 o desvio-padrão é  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$  e no caso 32 é  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ .

Para os sistemas lineares do salto de temperatura (ver figuras A.3a e A.4a), o valor ideal não foi o mesmo em ambos os casos mas a região de menor erro é a mesma, isto é, entre os parâmetros 17 e 19. Para o caso 20 o melhor parâmetro é  $5 \times 10^3$  e para o caso 32 é  $5 \times 10^4$ . Para os sistemas lineares do fluxo de calor (ver figuras A.3b e A.4b) o valor ideal também não foi o mesmo em ambos os casos. Para o caso 20 tem-se que o melhor parâmetro de truncamento é  $1 \times 10^{-4}$  e para caso 32 é  $1 \times 10^{-3}$ .

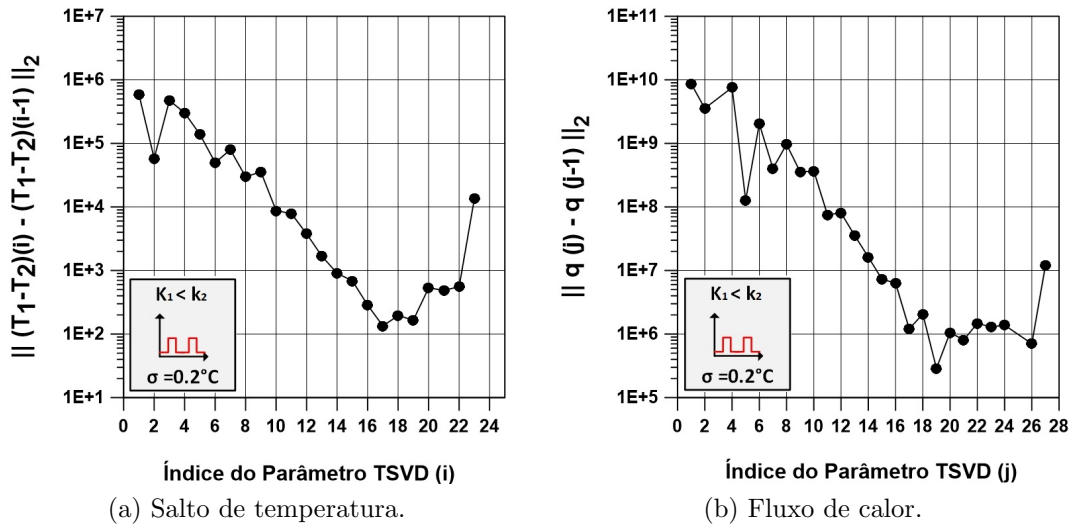


Figura A.3: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 20 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ).

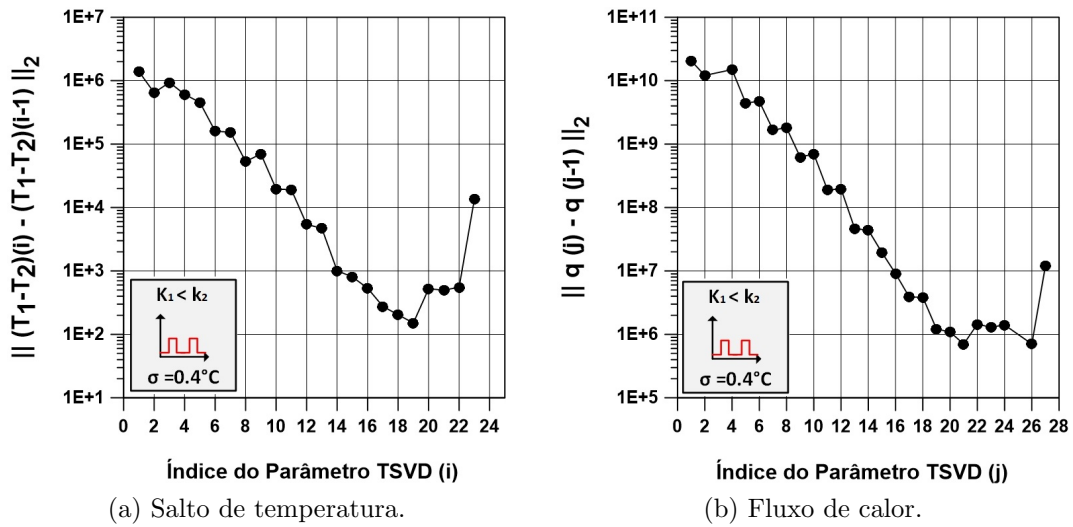


Figura A.4: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 32 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ).

As figuras A.5 e A.6 apresentam os erros para a escolha dos parâmetros de truncamento para os casos 21 e 33, respectivamente. Pode-se observar que as figuras A.5a e A.6a possuem um comportamento bem parecido e o valor ideal de truncamento é  $5 \times 10^4$  em ambos os casos. Já para os sistemas do fluxo de calor, (ver figuras A.5b e A.6b) o melhor parâmetro é  $1 \times 10^{-3}$  também em ambos os casos.

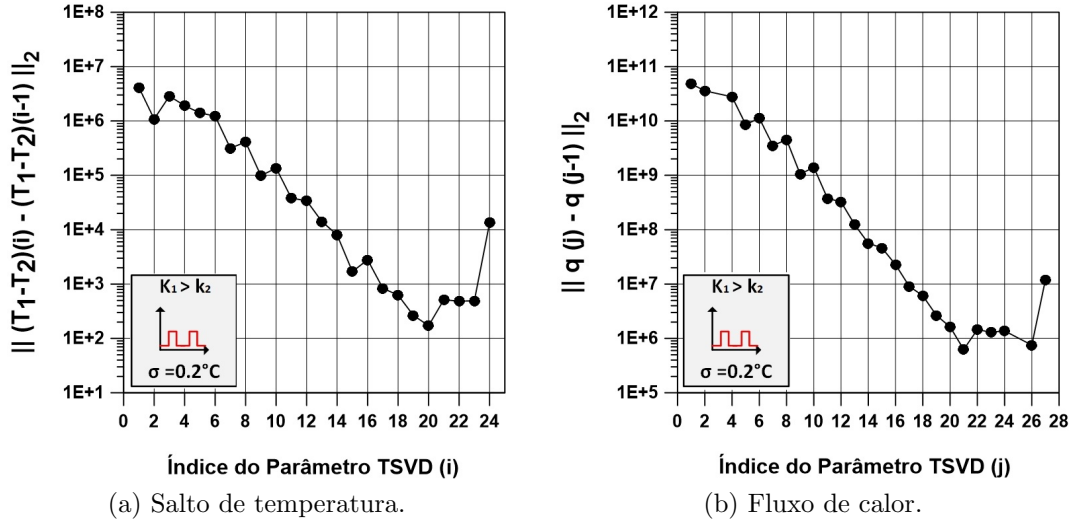


Figura A.5: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 21 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ).

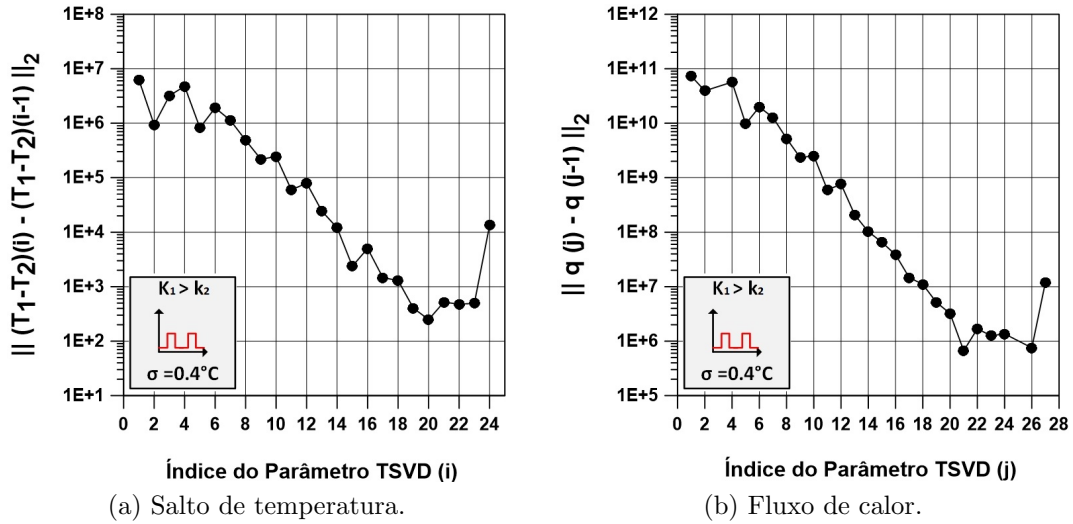


Figura A.6: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 33 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ).

Por fim, o perfil 4 será analisado começando pelos casos com dois materiais iguais. As figuras A.7 e A.8 apresentam os erros para a escolha dos parâmetros de truncamento para os casos 22 e 34, respectivamente.

Os parâmetros de truncamento ideais nos sistemas lineares do salto de temperatura não são os mesmos mas estão localizados na mesma região. Para o caso 22, o melhor parâmetro tem valor  $1 \times 10^5$ , já para o caso 34 tem valor  $5 \times 10^5$ . Para os sistemas lineares do fluxo de calor, os comportamentos são bem parecidos e o melhor parâmetro de truncamento é  $1 \times 10^{-3}$  em ambos os casos.

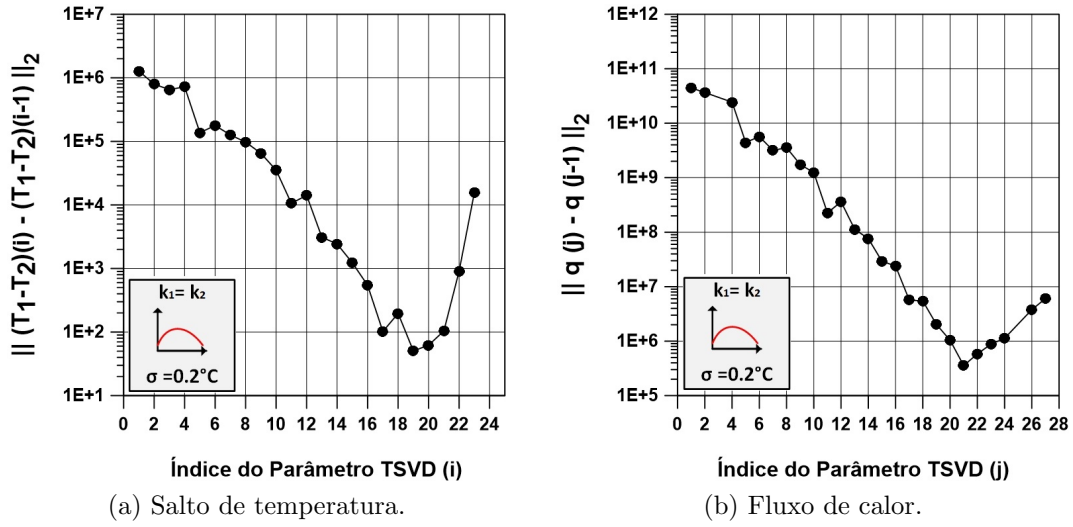


Figura A.7: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 22 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ).

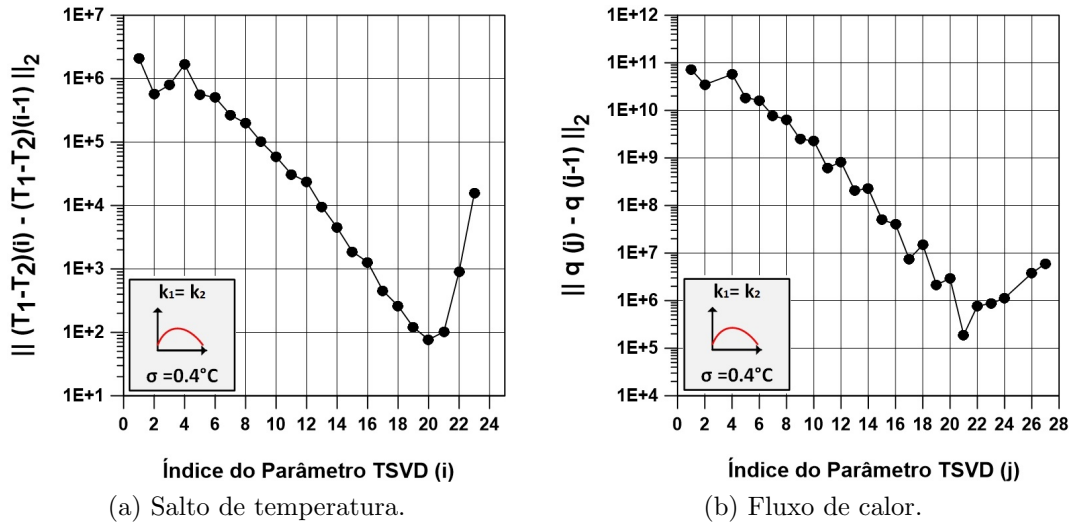


Figura A.8: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 34 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ).

As figuras A.9 e A.10 apresentam os erros para a escolha dos parâmetros de truncamento para os casos 23 e 35, respectivamente. Nestes casos, continua-se com o perfil 4 mas com a configuração 2 dos materiais. Ao analisar as figuras, observa-se que o melhor parâmetro de truncamento para os sistemas lineares do salto de temperatura é  $5 \times 10^4$  (ver figuras A.9a e A.10a) e para os sistemas do fluxo de calor o valor ideal é  $1 \times 10^{-3}$  (ver figuras A.9b e A.10b).

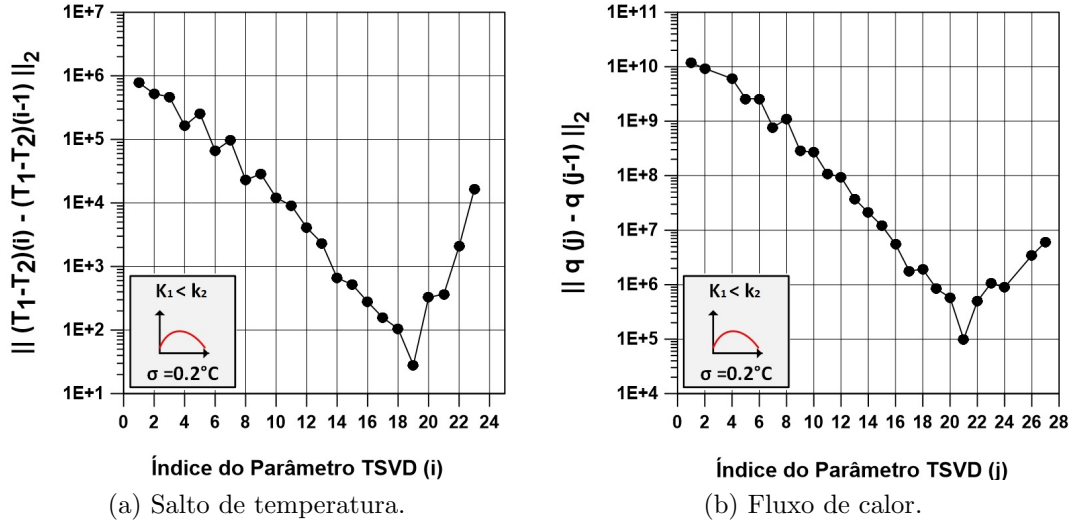


Figura A.9: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 23 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ).

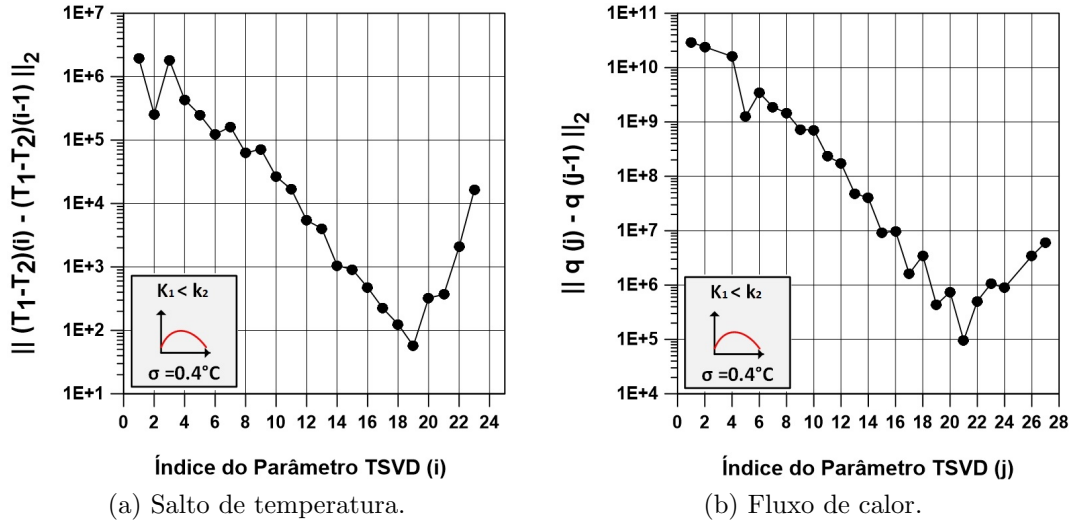


Figura A.10: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 35 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ).

Ao trocar para a configuração 3, ainda no perfil 4, tem-se as figuras A.11 e A.12 que mostram os erros para a escolha dos parâmetros de truncamento nos casos 24 e 36, respectivamente. Para os sistemas do salto de temperatura, o parâmetro ideal é  $5 \times 10^4$  em ambos os casos. Para os sistemas do fluxo de calor, os valores são distintos em cada caso, a saber,  $1 \times 10^{-3}$  no caso 24 e  $5 \times 10^{-3}$  no caso 36.

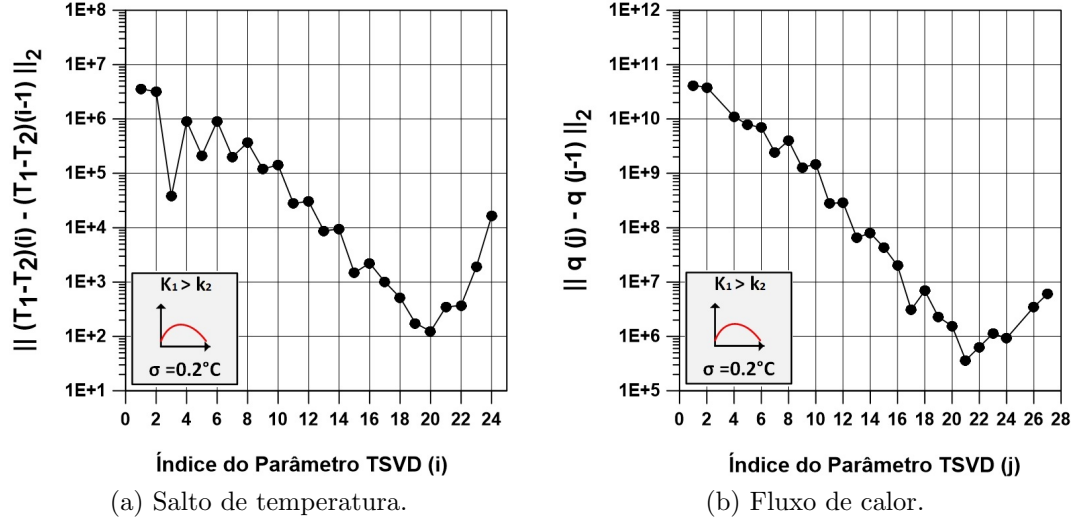


Figura A.11: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 24 - ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ).

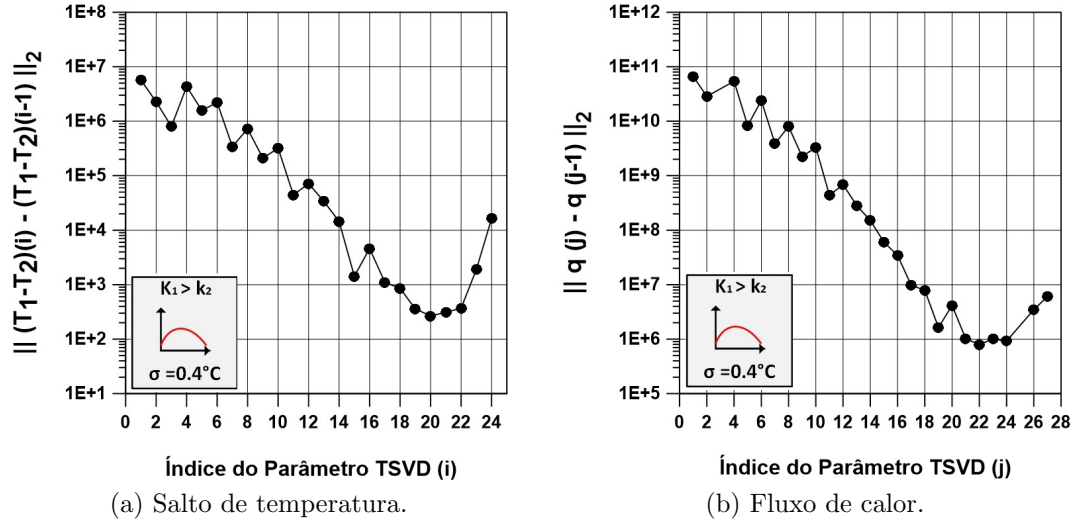


Figura A.12: Escolha do parâmetro TSVD - Caso 36 - ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ).

# Apêndice B

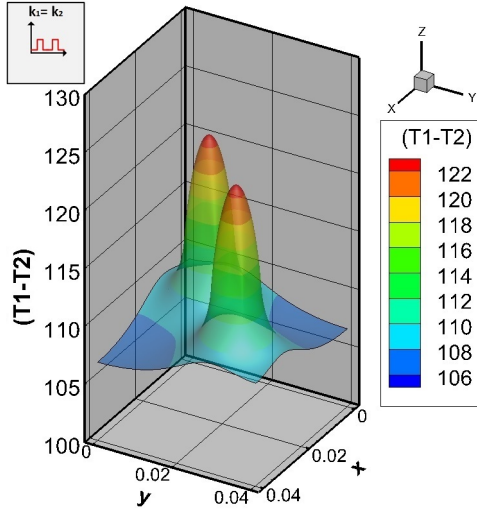
Neste apêndice serão apresentadas as estimativas dos perfis 3 e 4, com as configurações de materiais propostas e com os diferentes níveis de ruído nas medidas, isto é, serão apresentados os resultados dos casos 7-12, 19-24 e 31-36, de acordo com a tabela 5.4.

## **Estimativa do Perfil 3 - Dois materiais iguais (configuração 1)**

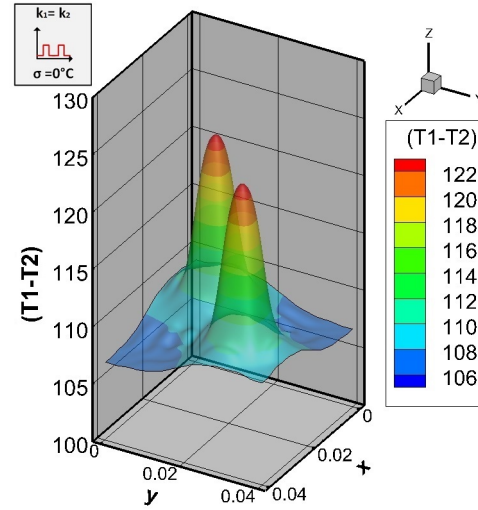
Nesta seção, serão analisados os casos com perfil 3 e configuração 1, isto é, perfil com duas descontinuidades e usando dois materiais iguais. Os casos correspondentes a este perfil e a esta configuração são os casos 7, 19 e 31 (ver tabela 5.4), que são os casos sem ruído, com ruído com desvio-padrão  $\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$  e, com ruído com desvio-padrão  $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ , respectivamente.

A figura B.1a mostra o salto de temperatura exato para o perfil 3 com configuração 1. A estimativa sem ruído nas medidas é apresentada na figura B.1b e, como pode ser observado, está em ótima concordância com o exato. Incluindo ruído nas medidas, tem-se os casos 19 e 31, apresentados nas figuras B.1c e B.1d, respectivamente. Pode-se notar que as estimativas não conseguem atingir o valor máximo da temperatura mas conseguem recuperar razoavelmente o perfil. Deve-se salientar que o fato de não atingir o valor máximo da temperatura pode ser atribuído à escolha do parâmetro de truncamento.

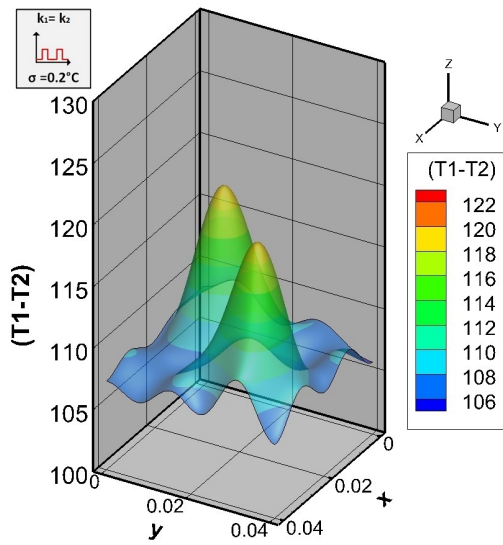




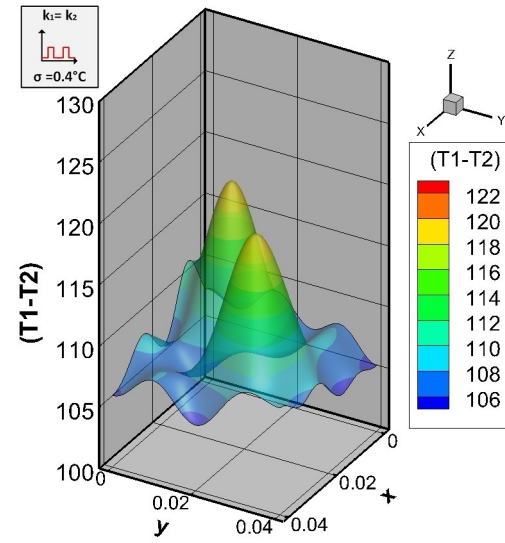
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 7.



(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^{\circ}\text{C}$ ) - Caso 19.



(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$ ) - Caso 31.

Figura B.1: Salto de Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) - Perfil 3 - Configuração 1.

A figura B.2 apresenta o fluxo de calor exato e estimado para o perfil 3 com configuração 1. Pode-se observar que a estimativa no caso sem ruído nas medidas, isto é, caso 7, está em ótima concordância com o exato. Com o acréscimo do ruído nas medidas, as estimativas pioram bastante, é possível identificar o local da descontinuidade mas não o valor máximo do fluxo. Este perfil é mais difícil de estimar devido as duas descontinuidades, somado ao fato da escolha do parâmetro de truncamento que influencia na qualidade da solução.

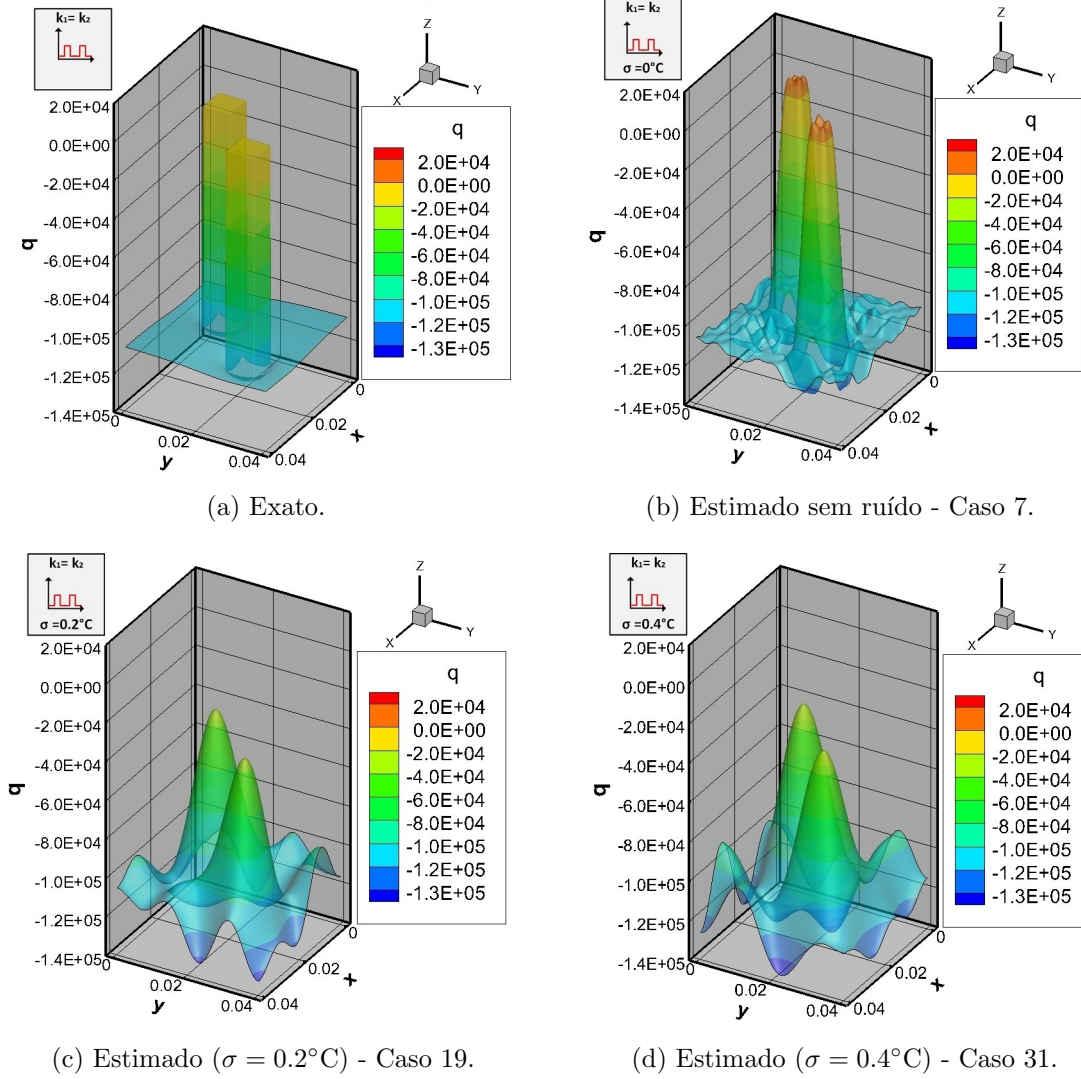


Figura B.2: Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 3 - Configuração 1.

A figura B.3b mostra a condutância térmica de contato estimada sem ruído nas medidas, isto é, caso 7. Nota-se que a estimativa está em ótima concordância com o perfil exato apresentado na figura B.3a. Ao incluir ruído nas medidas, as estimativas pioram, como pode ser observado nas figuras B.3c e B.3d. Note que, apesar de conseguir identificar o local das discontinuidades, o método não foi capaz de identificar o valor mínimo da condutância térmica de contato.

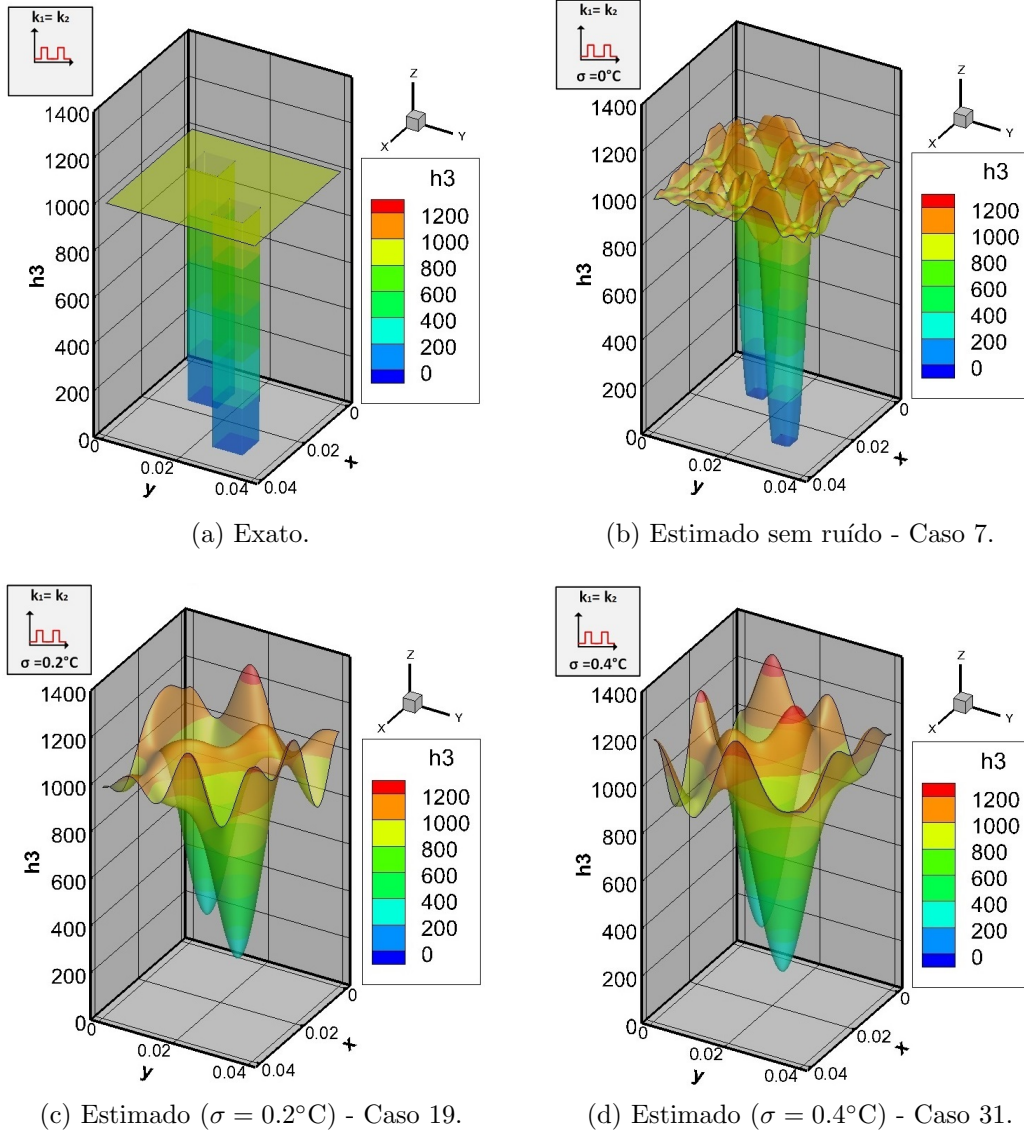


Figura B.3: Condutância térmica de contato ( $\text{W/m}^2\text{C}$ ) - Perfil 3 - Configuração 1.

A figura B.4 apresenta o resíduo para os casos 19 e 31. Pode-se notar que, em ambos os casos, o resíduo está oscilando em torno do zero, o que não acontecia no perfil 2. Como a estimativa não atinge o valor mínimo, a mesma não foi cortada no zero como acontecia no perfil 2. Os resíduos deveriam estar na mesma ordem de grandeza do desvio-padrão, o que não acontece no caso 31 (ver figura B.4b). Como o campo de temperatura estimado foi encontrado utilizando um problema direto com

uma malha contendo 121x121x31 pontos, esta pode ser a causa para o aparecimento de resíduo um pouco mais alto.

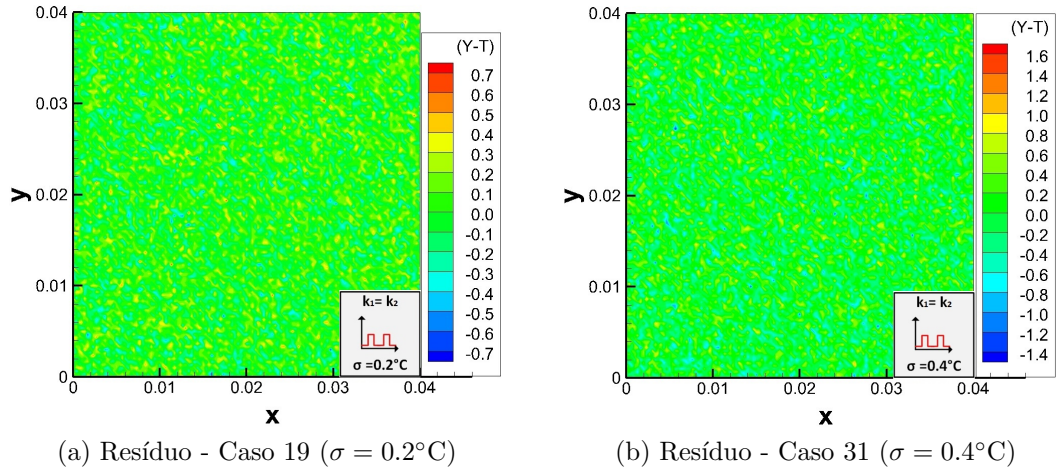


Figura B.4: Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 3 - Configuração 1.

### Estimativa do Perfil 3 - Dois materiais iguais (configuração 2)

Mudando a escolha dos materiais para a configuração 2, tem-se o salto de temperatura exato para o perfil 3 apresentado na figura B.5a. O salto de temperatura estimado sem ruído nas medidas é apresentado na figura B.5b, onde nota-se uma ótima concordância com o exato. E, por fim, os saltos de temperatura estimados com ruído são apresentados nas figuras B.5c e B.5d, configurando os casos 20 e 32, respectivamente. Apesar dos mesmos parâmetros de truncamento serem utilizados em ambos os casos, como pode ser visto na tabela 5.6, a estimativa do caso 20 se aproxima mais da solução exata do que o caso 32. Isto é perfeitamente razoável, uma vez que, no caso 20 o desvio-padrão das medidas é menor. No entanto, deve-se ressaltar que o parâmetro de truncamento influencia na qualidade da estimativa.

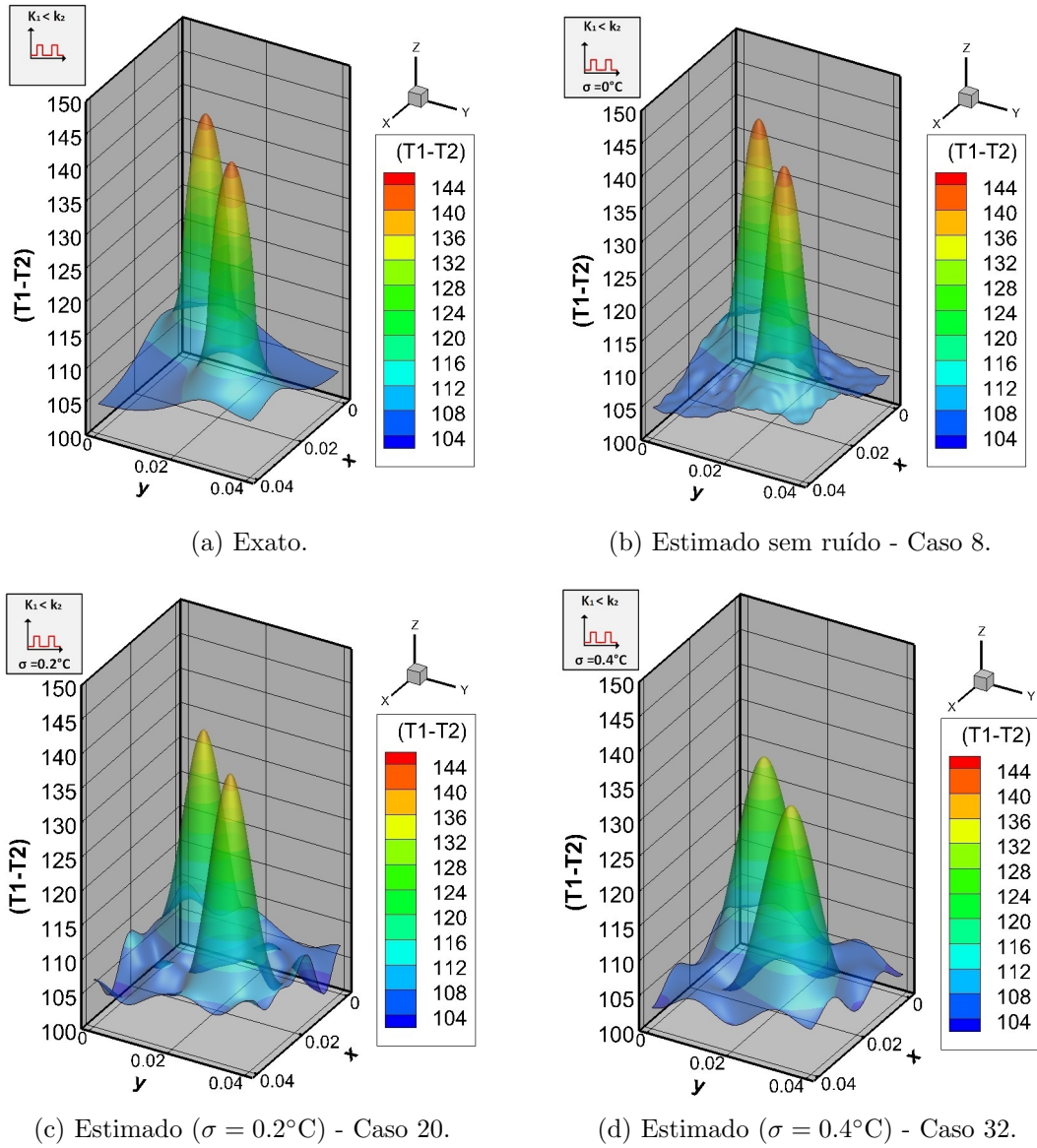
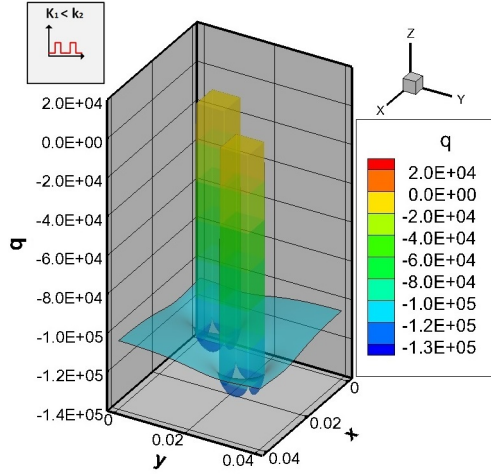


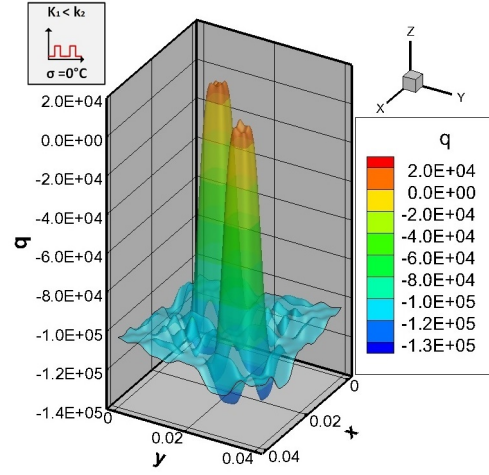
Figura B.5: Salto de Temperatura ( $^\circ\text{C}$ ) - Perfil 3 - Configuração 2.



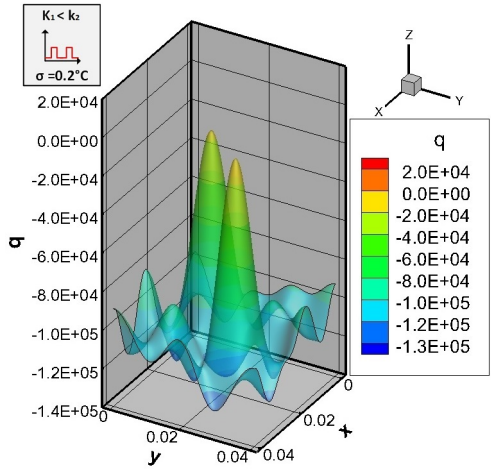
O fluxo de calor exato para o perfil 3 com configuração 2 é apresentado na figura B.6a. O fluxo de calor estimado sem ruído nas medidas é apresentado na figura B.6b, onde nota-se uma ótima concordância com o exato. E, por fim, os fluxos de calor estimados com ruído são apresentados nas figuras B.6c e B.6d, configurando os casos 20 e 32, respectivamente. Nota-se que, em ambos os casos, é possível identificar o local das discontinuidades. E, da mesma forma que no salto de temperatura, o fluxo de calor no caso 20 se aproxima mais do perfil exato.



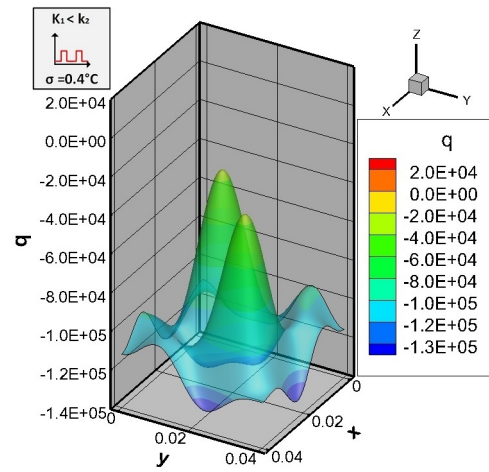
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 8.



(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ) - Caso 20.



(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) - Caso 32.

Figura B.6: Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 3 - Configuração 2.

A figura B.7 mostra os perfis exato e estimados da condutância térmica de contato para o perfil 3 com configuração 2. Podemos observar o mesmo comportamento do salto de temperatura e do fluxo, isto é, para o caso sem ruído, a estimativa está em ótima concordância com o exato (ver figuras B.7a e B.7b). Para os casos com ruído (casos 20 e 32), a estimativa se aproxima mais do exato quando o desvio-padrão é menor (ver figuras B.7a, B.7c e B.7d).

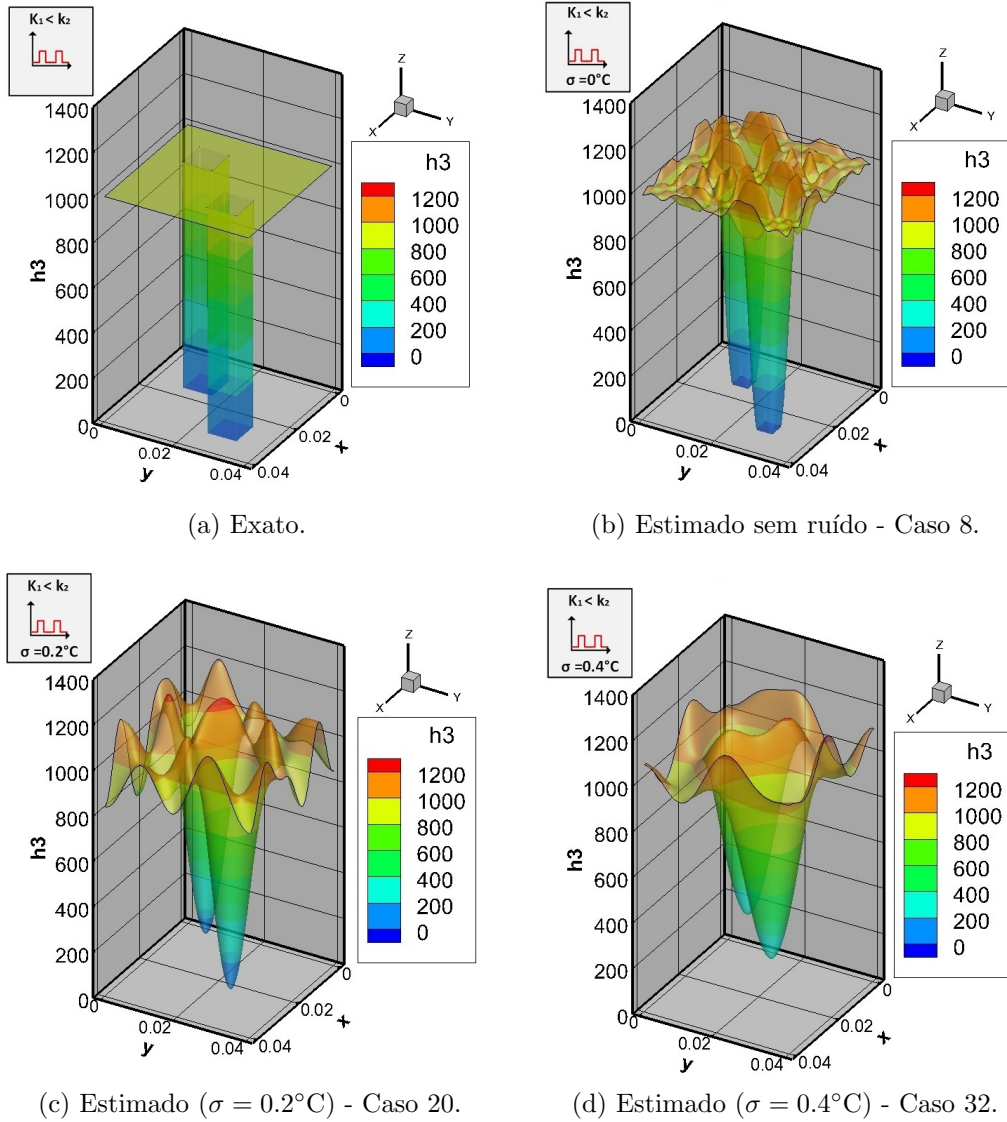
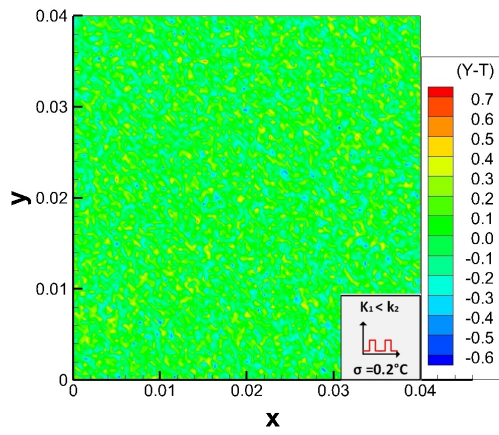
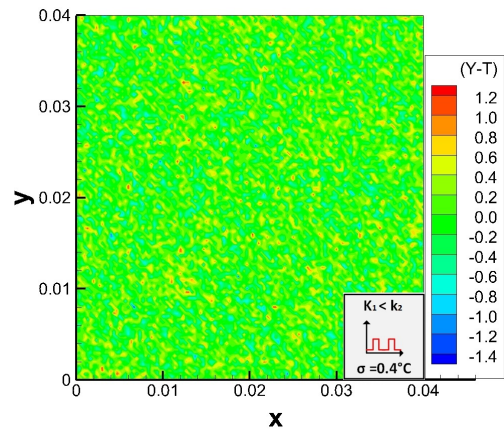


Figura B.7: Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 3 - Configuração 2.

A figura B.8 apresenta o resíduo para os casos 20 e 32. Podemos observar que os resíduos são muito parecidos com os resíduos dos casos 19 e 31 (ver figura B.4).



(a) Resíduo - Caso 20 ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ )



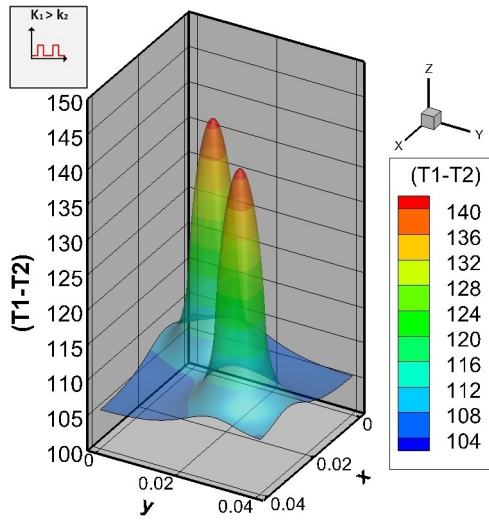
(b) Resíduo - Caso 32 ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ )

Figura B.8: Resíduo  $(Y - T)$  - Perfil 3 - Configuração 2.

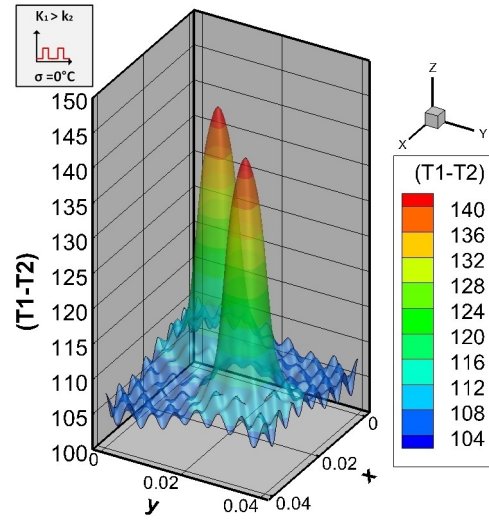


### Estimativa do Perfil 3 - Dois materiais diferentes (configuração 3)

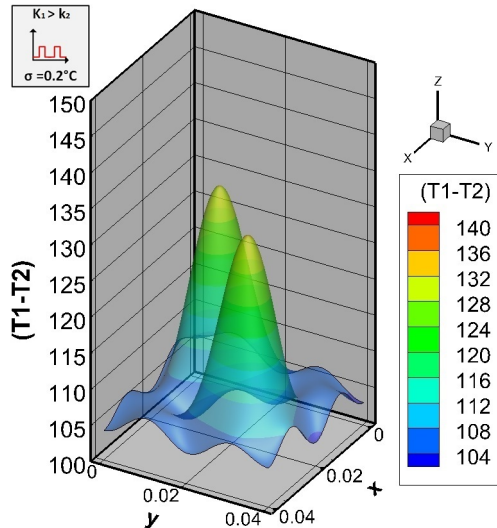
A figura B.9 mostra os saltos de temperatura exato e estimados do perfil 3 com a configuração 3. São apresentados os casos sem e com ruído, isto é, casos 9, 21 e 33, respectivamente. A figura B.9b apresenta a estimativa para o caso 3, isto é, sem ruído nas medidas. Note que, apesar das oscilações na base, a estimativa está em boa concordância com a exata. As figuras B.9c e B.9d apresentam as estimativas para os casos 21 e 33, respectivamente. Observe que as estimativas com ruído nas medidas conseguem determinar a localização dos saltos mas não atingem o valor máximo. E, mesmo com desvios-padrão diferentes, as estimativas são bem parecidas entre si.



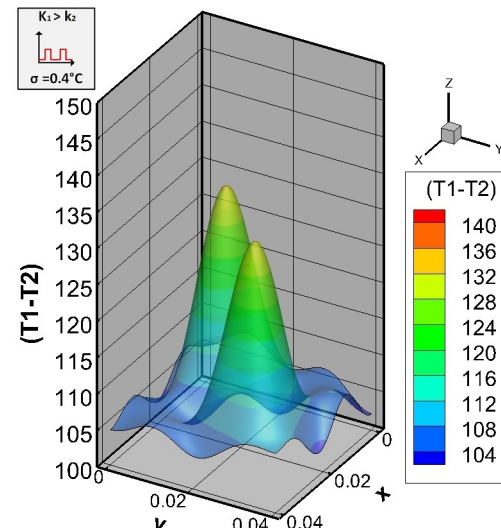
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 9.



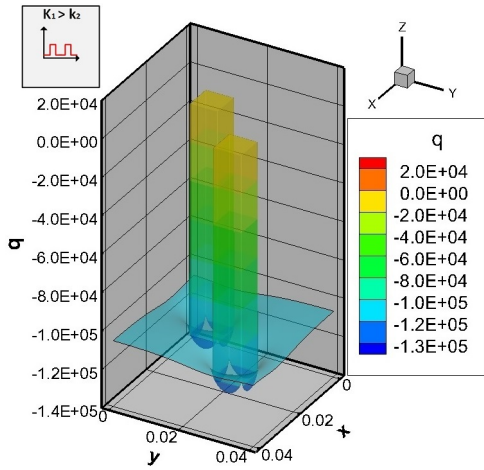
(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ )- Caso 21.



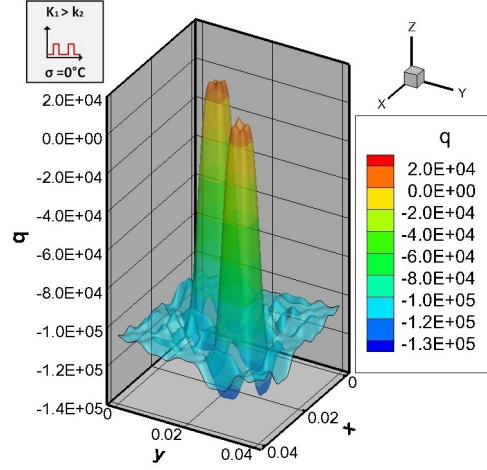
(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) - Caso 33.

Figura B.9: Salto de Temperatura ( $^\circ\text{C}$ ) - Perfil 3 - Configuração 3.

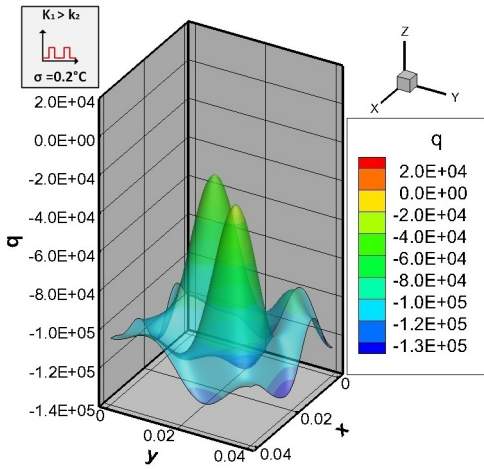
A figura B.10a apresenta o perfil exato do fluxo de calor do perfil 3 com configuração 3. O fluxo de calor no caso 9 é bem estimado como pode ser visto na figura B.10b. Já os casos com ruído nas medidas, isto é, casos 21 e 33, são apresentados nas figuras B.10c e B.10d, respectivamente. Pode-se notar que em ambos os casos, o método é capaz de identificar a localização das discontinuidades mas não estima o valor máximo de fluxo.



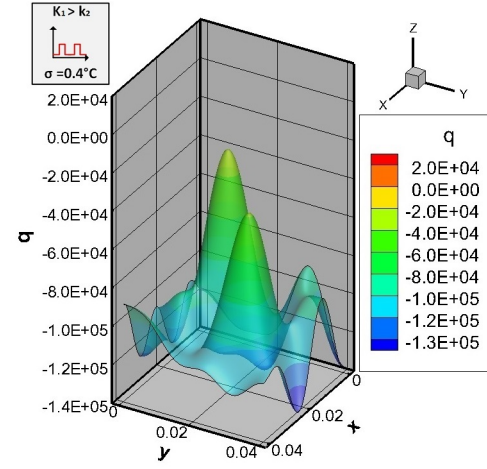
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 9.



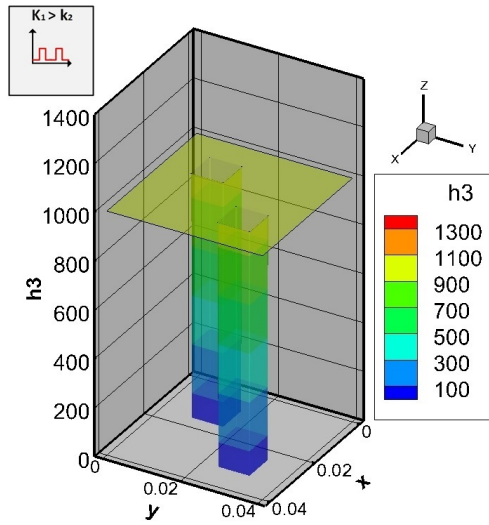
(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ) - Caso 21.



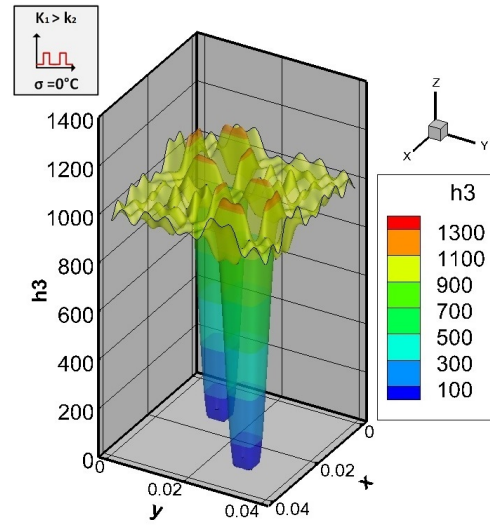
(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) - Caso 33.

Figura B.10: Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 3 - Configuração 3.

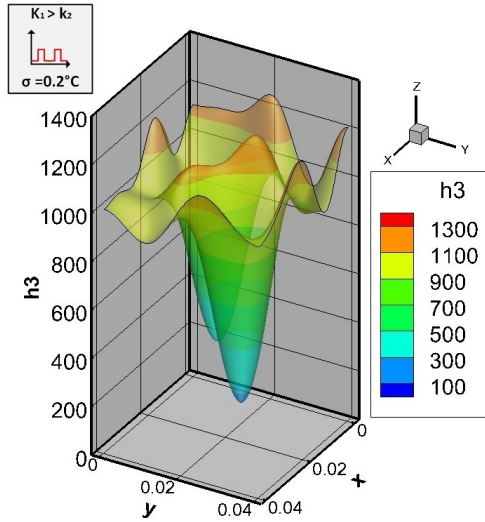
A figura B.11a apresenta o perfil exato da condutância térmica de contato para o perfil 3 com configuração 3. A condutância térmica de contato é bem estimada, apesar das oscilações, como pode ser visto na figura B.11b. Já os casos com ruído nas medidas, isto é, casos 21 e 33, são apresentados nas figuras B.11c e B.11d, respectivamente. Assim como na estimativa do fluxo de calor, pode-se notar que em ambos os casos, o método é capaz de identificar a localização das descontinuidades mas não estima o valor mínimo da condutância térmica de contato. Além disso, comparando as estimativas entre as diferentes configurações, observa-se que a estimativa com configuração 3 apresenta oscilações bem maiores que as configurações 1 e 2 (ver figuras B.3 e B.7).



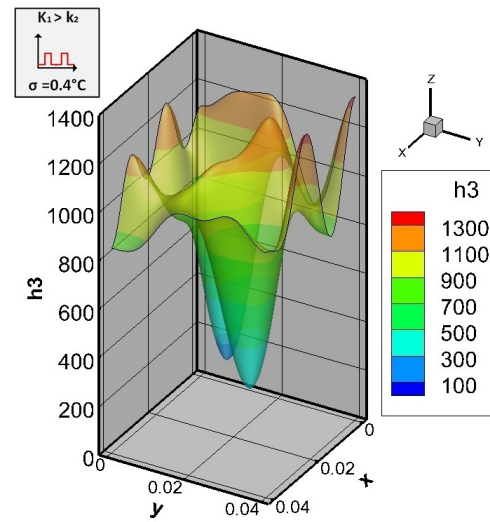
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 9.



(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ) - Caso 21.



(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) - Caso 33.

Figura B.11: Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 3 - Configuração 3.

A figura B.12 apresenta o resíduo para os casos 21 e 33. Pode-se observar que os resíduos são muito parecidos com os resíduos das configurações 1 e 2 (ver figuras B.4 e B.8).

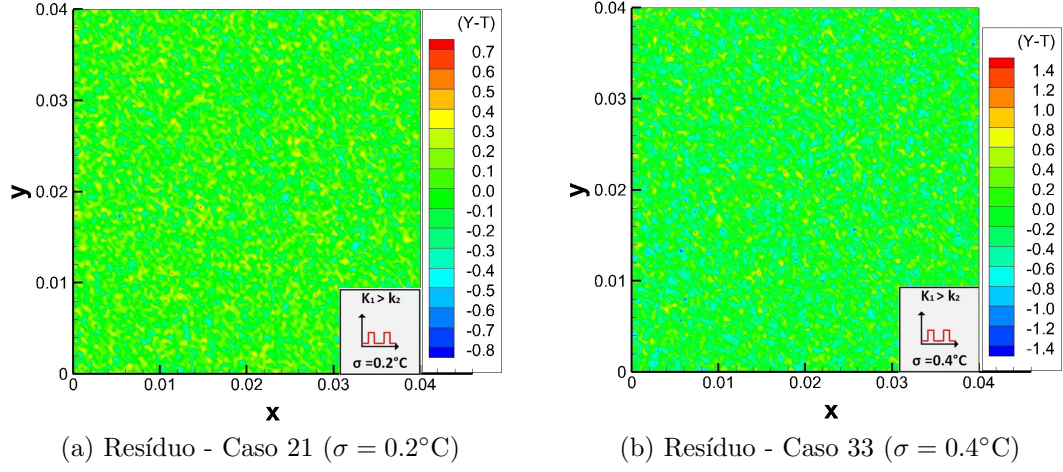
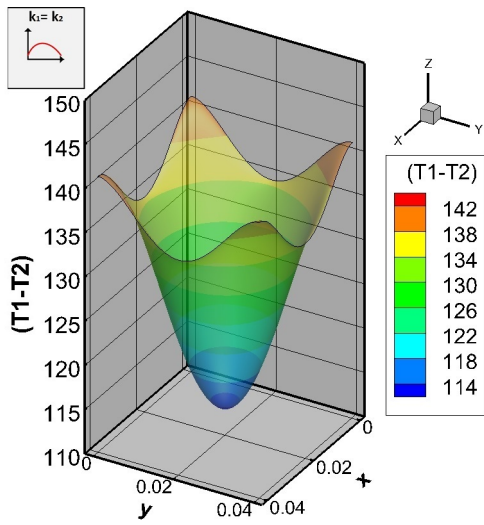


Figura B.12: Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 3 - Configuração 3.

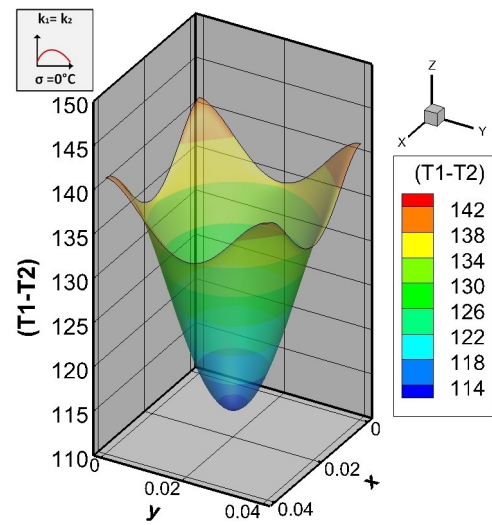
### Estimativa do Perfil 4 - Dois materiais iguais (configuração 1)

Nesta seção, serão analisados os casos com perfil 4 e configuração 1, isto é, um perfil suave de condutância térmica de contato e usando dois materiais iguais. Os casos correspondentes a este perfil e a esta configuração são os casos 10, 22 e 34 (ver tabela 5.4).

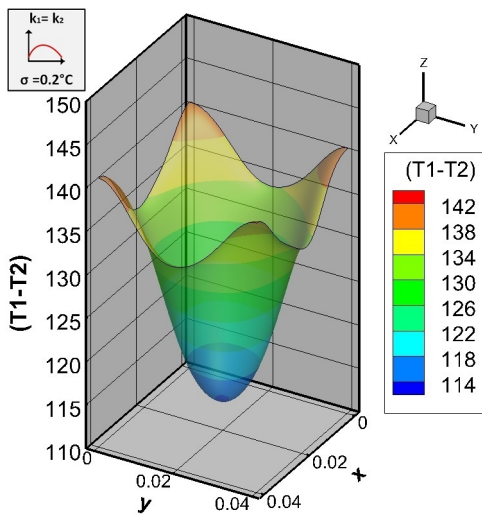
As figuras B.13b, B.13c e B.13d mostram as estimativas para os casos 10, 22 e 34, respectivamente. Note que, todas as estimativas estão em ótima concordância com o exato (apresentado na figura B.13a), até mesmo o caso 34 onde o desvio-padrão das medidas é  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ .



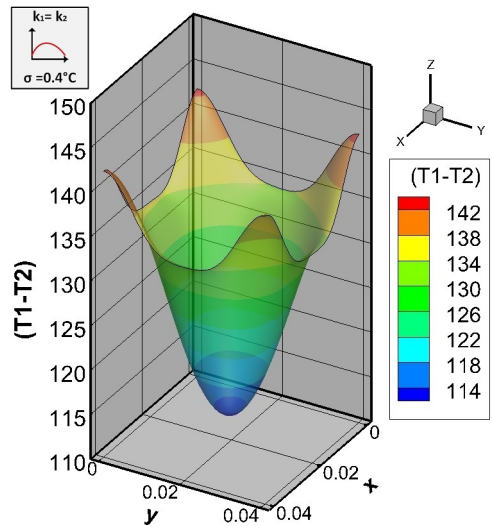
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 10.



(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ) - Caso 22.

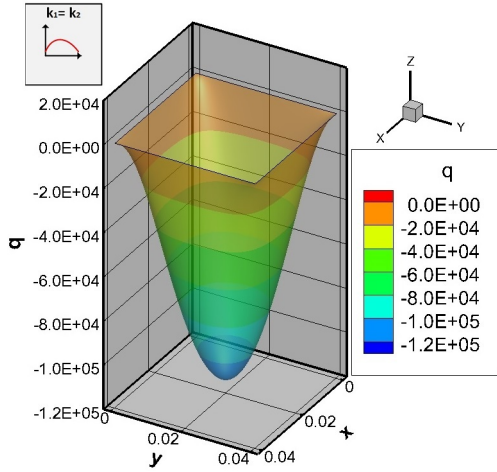


(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) - Caso 34.

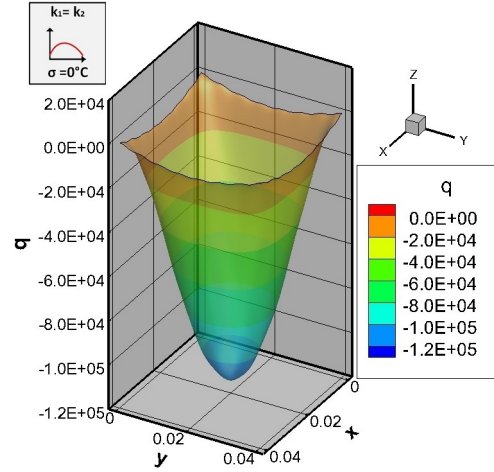
Figura B.13: Salto de Temperatura ( $^\circ\text{C}$ ) - Perfil 4 - Configuração 1.



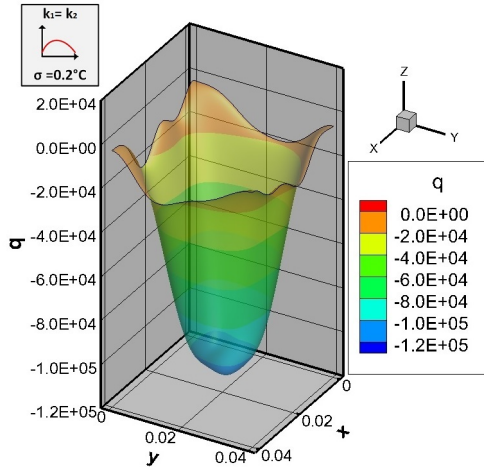
A figura B.14 mostra o fluxo de calor exato e estimado sem/com ruído para o perfil 4 e com configuração 1. Para o caso sem ruído nas medidas, isto é, caso 10 (ver figura B.14b), a estimativa está em ótima concordância com o exato (ver figura B.14a). Para os casos com ruído, isto é, casos 22 e 34 (ver figuras B.14c e B.14d), podemos observar oscilações próximo ao valor mínimo do fluxo, ainda assim, as estimativas conseguem identificar bem o perfil, mostrando uma boa concordância com o perfil exato.



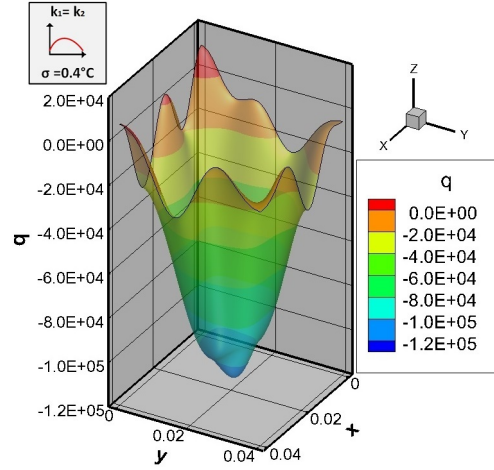
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 10.



(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ) - Caso 22.



(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) - Caso 34.

Figura B.14: Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 4 - Configuração 1.

As estimativas da condutância térmica de contato para o perfil 4 e configuração 1, podem ser vistas na figura B.15. A figura B.15a apresenta o perfil exato da condutância térmica de contato. A estimativa sem ruído nas medidas está em ótima concordância com o exato, como pode ser visto na figura B.15b. Acrescentando ruído nas medidas, as estimativas pioram (ver figuras B.15c e B.15d) mas, ainda assim, é possível identificar bem o perfil.

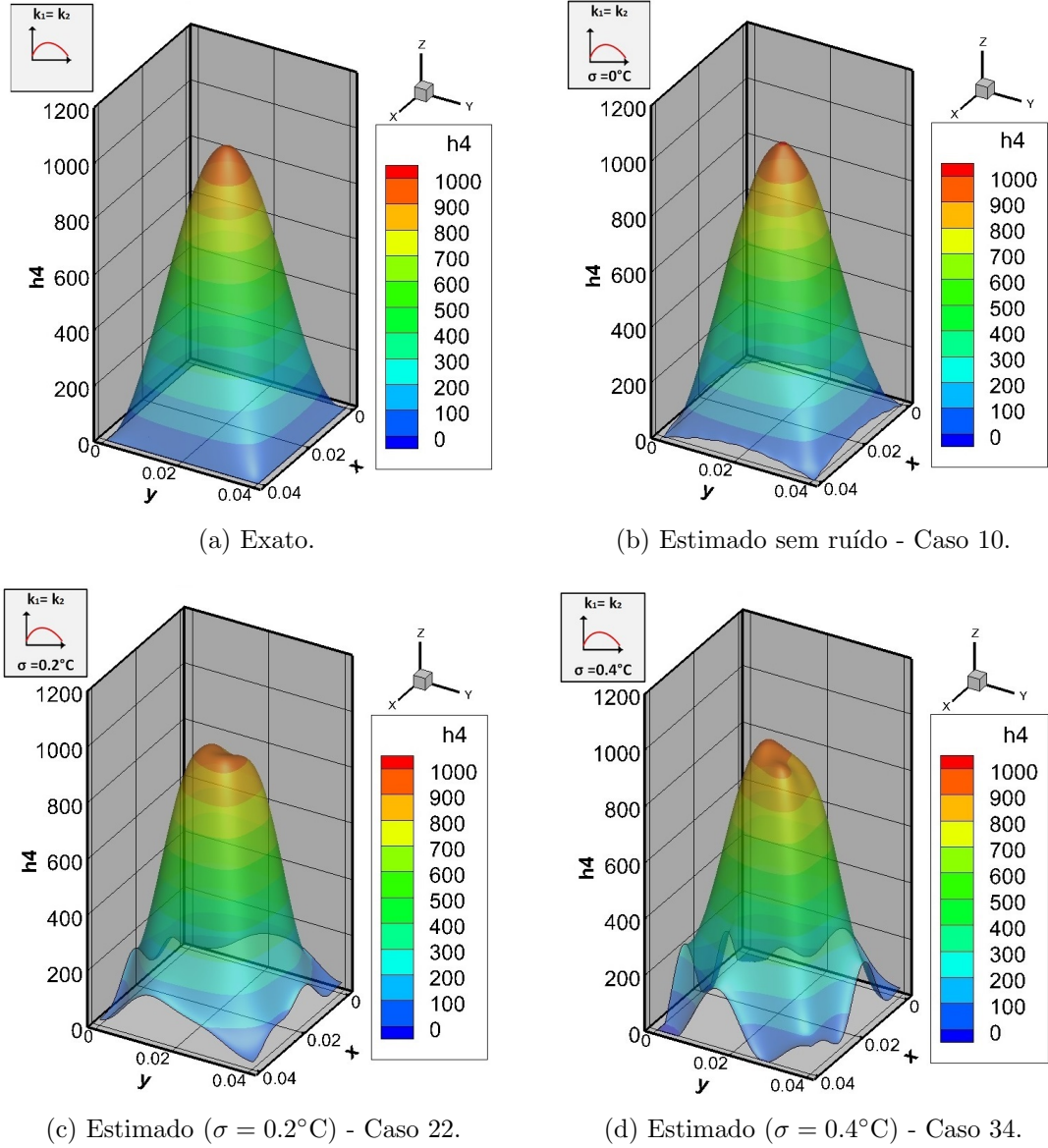


Figura B.15: Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 4 - Configuração 1.

A figura B.16 apresenta o resíduo para os casos 22 e 34. Os resíduos devem estar na mesma ordem de grandeza do desvio-padrão, o que não acontece no caso 34 (ver figura B.16b). Como este método não estima o campo de temperatura juntamente com a estimativa da condutância térmica de contato, a alternativa encontrada foi resolver a o problema direto com a estimativa da condutância, para então, obter o campo de temperatura medido. As temperaturas medidas foram obtidas utilizando uma malha contendo 121x121x31 pontos, o que pode ser a causa dos resíduos altos.

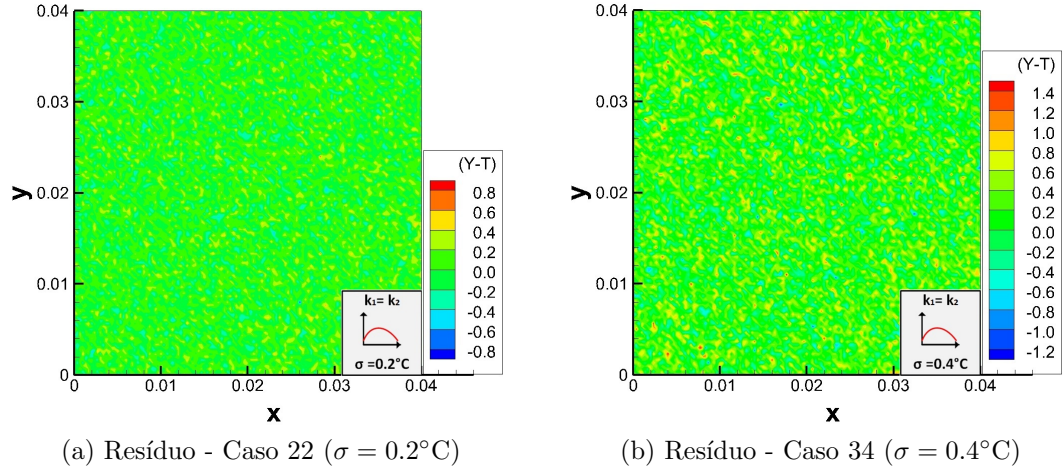


Figura B.16: Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 4 - Configuração 1.



### Estimativa do Perfil 4 - Dois materiais diferentes (configuração 2)

A figura B.17 mostra os saltos de temperatura exato e estimados do perfil 4 com a configuração 2. São apresentados os casos sem e com ruído, isto é, casos 11, 23 e 35, respectivamente. A figura B.17b apresenta a estimativa para o caso 11, isto é, sem ruído nas medidas. Note que a estimativa está em ótima concordância com o perfil exato. As figuras B.17c e B.17d apresentam as estimativas para os casos 23 e 35, respectivamente. Observe que até mesmo com desvio-padrão de  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$  a estimativa possui ótima concordância com o exato.

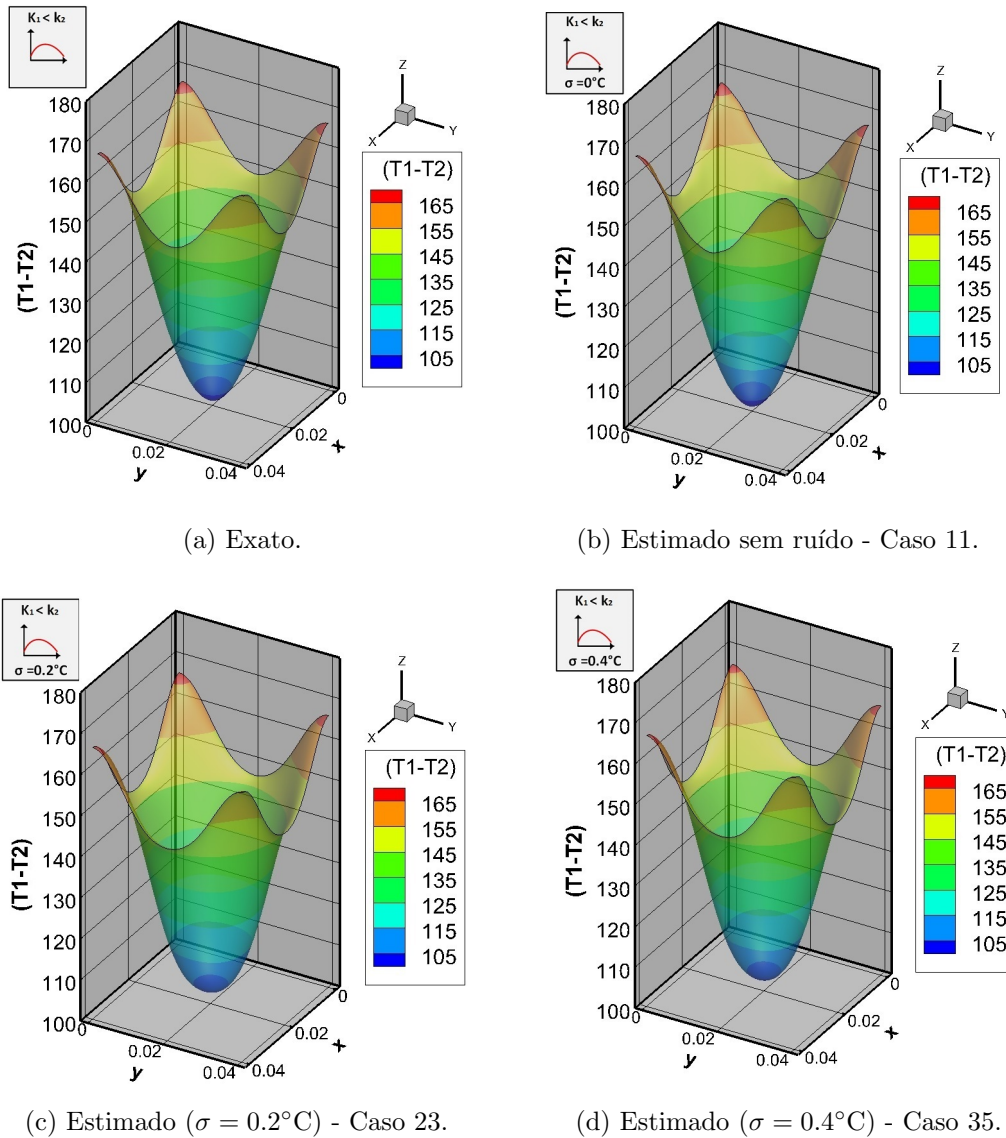
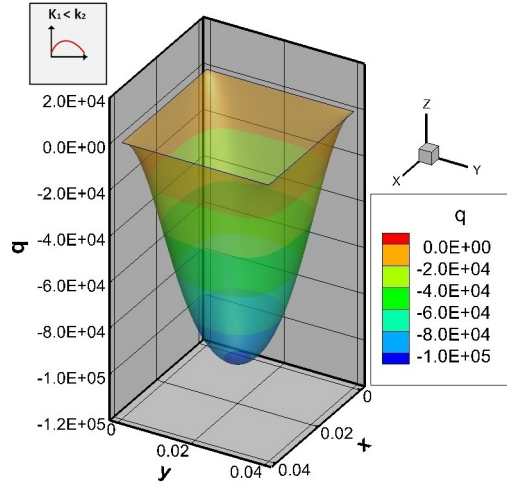


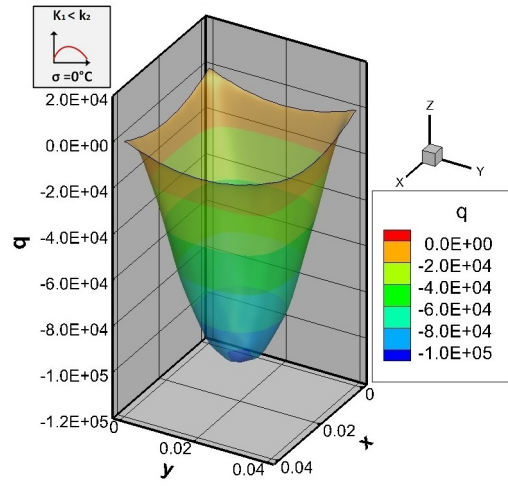
Figura B.17: Salto de Temperatura ( $^\circ\text{C}$ ) - Perfil 4 - Configuração 2.

O fluxo de calor exato para o perfil 4 com configuração 2 é apresentado na figura B.18a. O fluxo de calor estimado sem ruído nas medidas é apresentado na figura B.18b, onde nota-se uma ótima concordância com o exato. E, por fim, os fluxos de calor estimados com ruído são apresentados nas figuras B.18c e B.18d, configurando

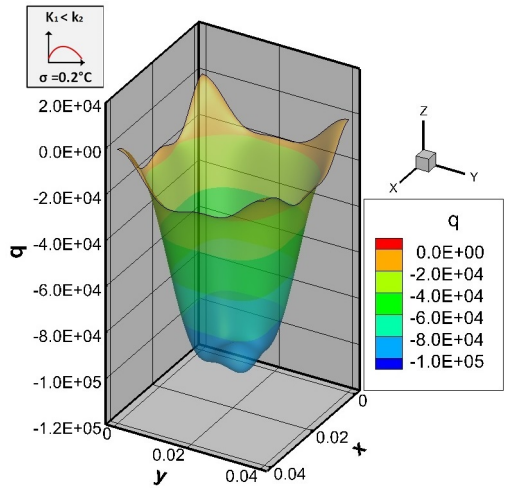
casos 23 e 35, respectivamente. Nota-se que, em ambos os casos, é possível recuperar razoavelmente o perfil mas com oscilações próximo ao valor mínimo do fluxo.



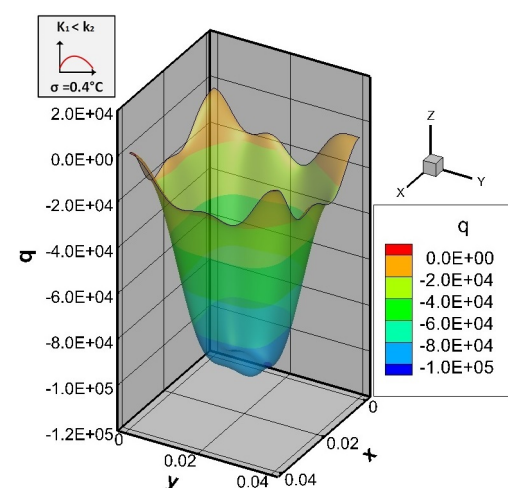
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 11.



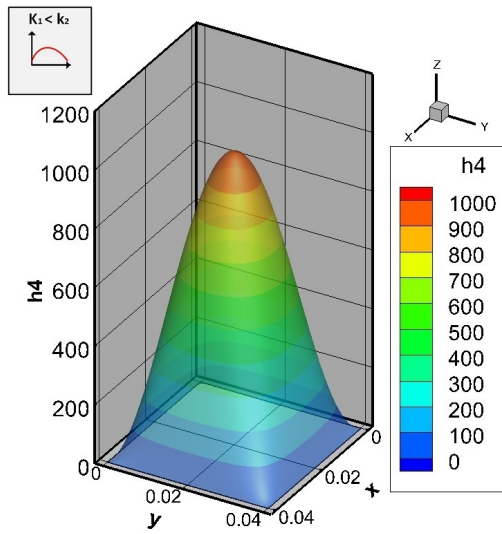
(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ) - Caso 23.



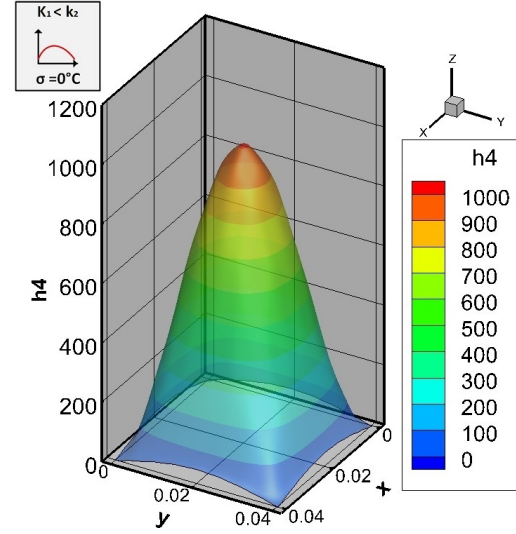
(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) - Caso 35.

Figura B.18: Fluxo de calor ( $\text{W/m}^2$ ) - Perfil 4 - Configuração 2.

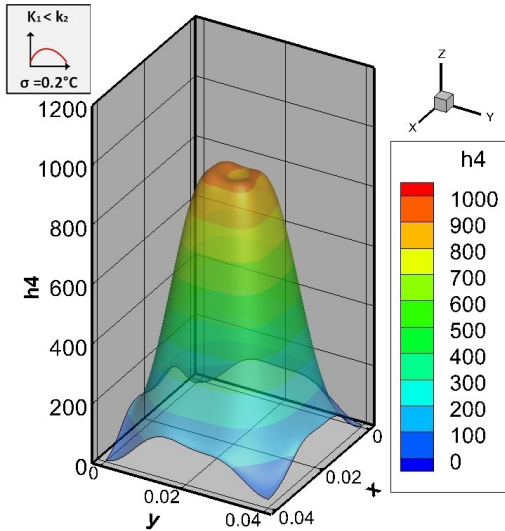
A figura B.19a apresenta o perfil exato da condutância térmica de contato para o perfil 4 com configuração 2. Sem ruído nas medidas, a condutância térmica de contato é bem estimada, o que já era esperado tendo em vista que este é um perfil suave (ver figura B.19b). Já os casos com ruído nas medidas, isto é, casos 23 e 34, são apresentados nas figuras B.19c e B.19d, respectivamente. Assim como na estimativa do fluxo de calor, pode-se notar que em ambos os casos, o método é capaz de identificar bem o perfil mas com oscilações próximo ao valor máximo da condutância térmica de contato. Estas oscilações presentes nas estimativas da condutância térmica de contato são decorrentes das oscilações presentes nas estimativas do fluxo de calor apresentadas anteriormente na figura B.18.



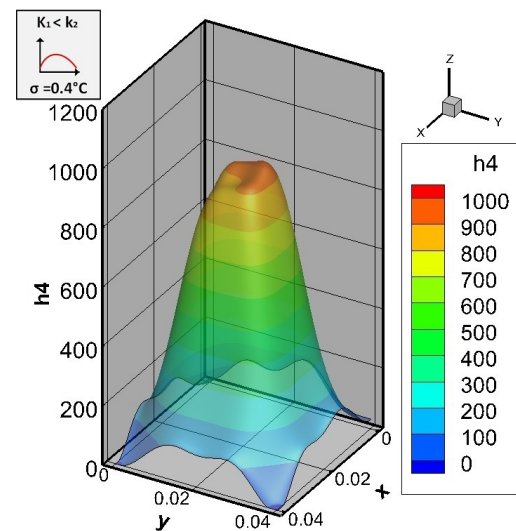
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 11.



(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ) - Caso 23.



(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) - Caso 35.

Figura B.19: Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 4 - Configuração 2.

A figura B.20 apresenta o resíduo para os casos 23 e 35. Os resíduos possuem o mesmo comportamento apresentado nos casos 22 e 34 (ver figura B.16)

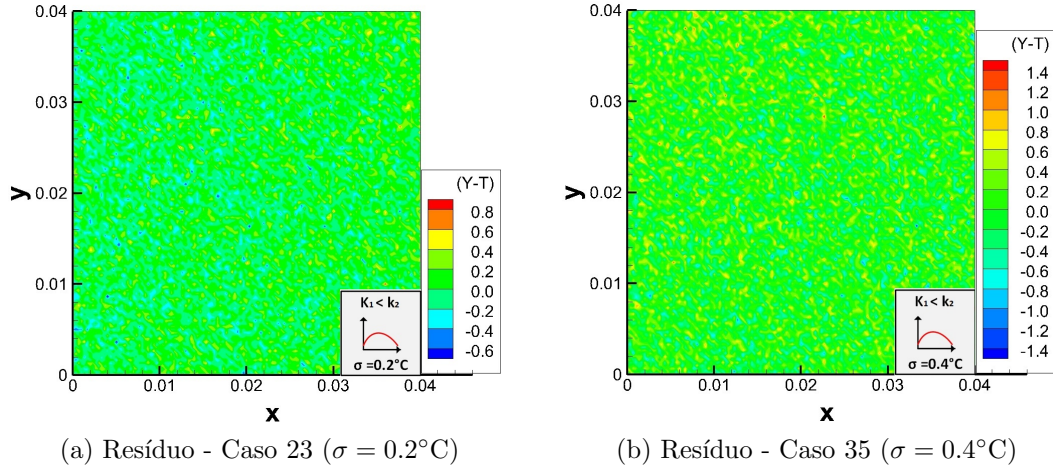
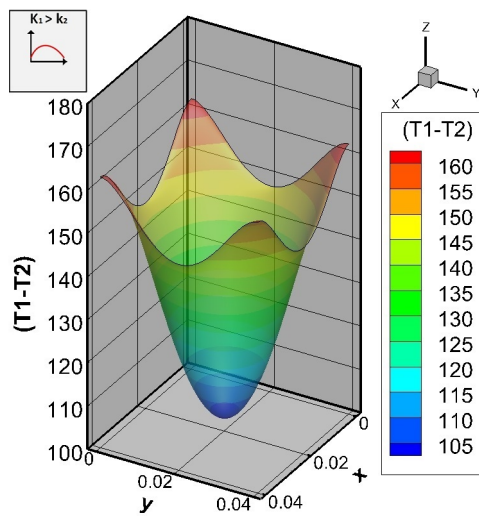


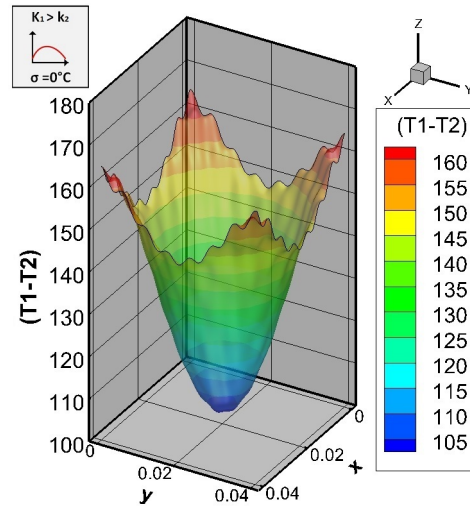
Figura B.20: Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 4 - Configuração 2.

### Estimativa do Perfil 4 - Dois materiais diferentes (configuração 3)

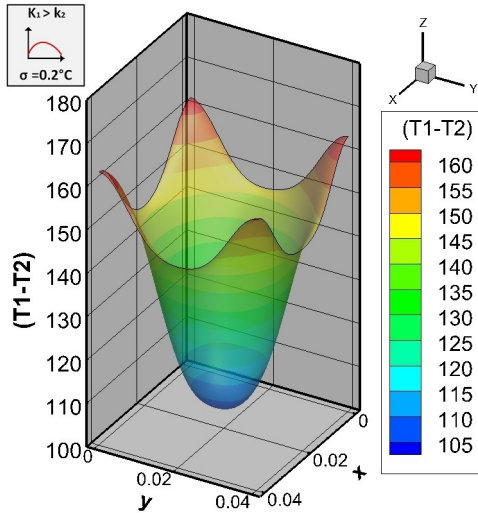
A figura B.21b apresenta a estimativa do salto de temperatura para o perfil 4, com configuração 3 e sem ruído nas medidas, isto é, caso 12. Note que, apesar das oscilações, a estimativa está em boa concordância com o exato (ver figura B.21a). Adicionando ruído nas medidas, as estimativas são suavizadas e ficam bem próximas do exato, como pode ser visto nas figuras B.21c e B.21d. Note que com  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$  a estimativa se aproxima mais do exato. Novamente, deve-se salientar que, a escolha do parâmetro de truncamento interfere na qualidade da solução.



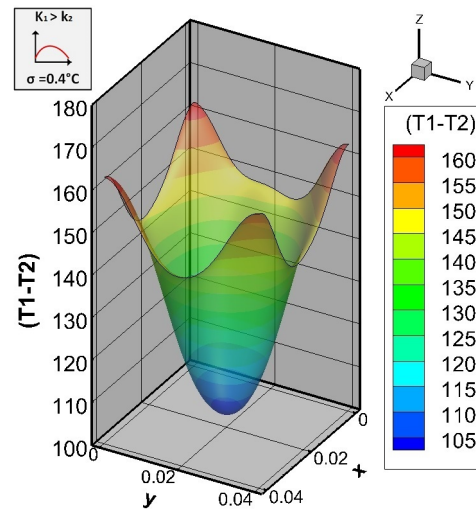
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 12.



(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ) - Caso 24.

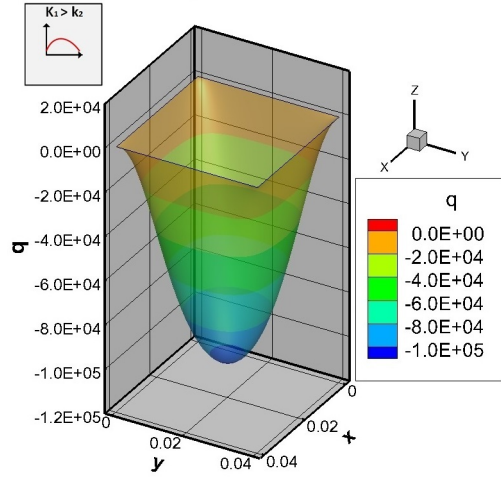


(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) - Caso 36.

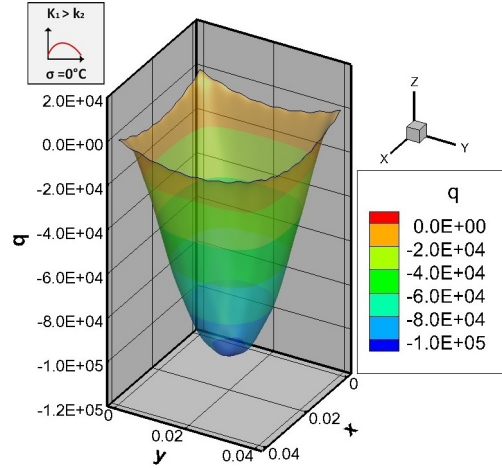
Figura B.21: Salto de Temperatura ( $^\circ\text{C}$ ) - Perfil 4 - Configuração 3.



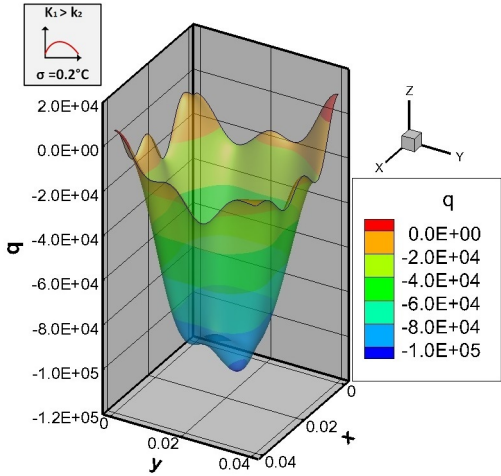
A figura B.22 apresenta o fluxo de calor exato assim com as estimativas sem e com ruído. Como nos casos anteriores para este perfil, a estimativa sem ruído está em ótima concordância com exato, como pode ser visto na figura B.22b. Adicionando ruído nas medidas é possível ver novamente as oscilações próximo ao valor mínimo, principalmente no caso 24, onde a estimativa piora consideravelmente (ver figuras B.22c e B.22d).



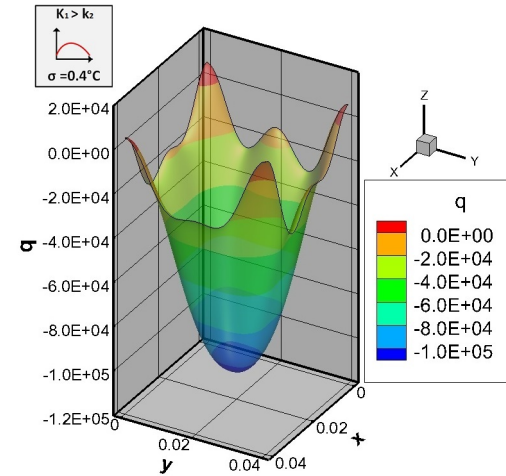
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 12.



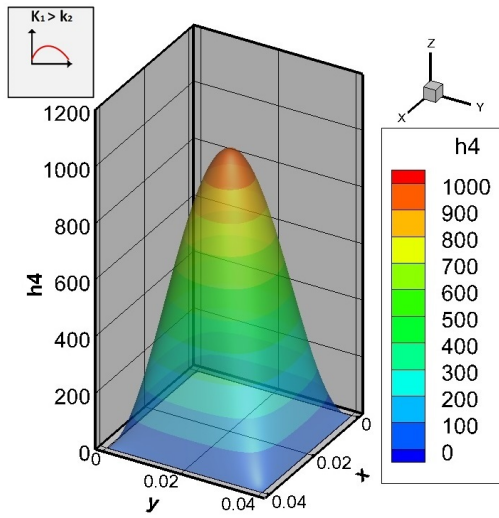
(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ) - Caso 24.



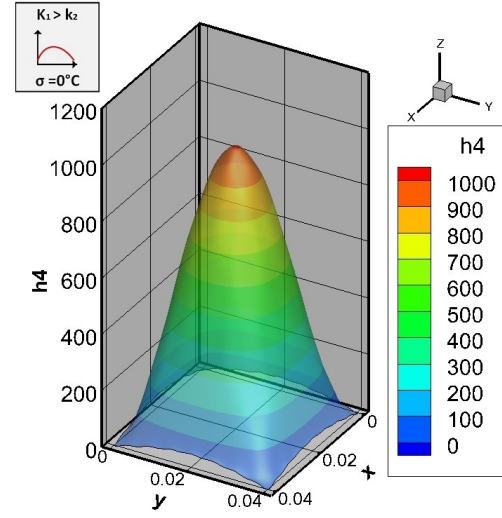
(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) - Caso 36.

Figura B.22: Fluxo de calor ( $\text{W}/\text{m}^2$ ) - Perfil 4 - Configuração 3.

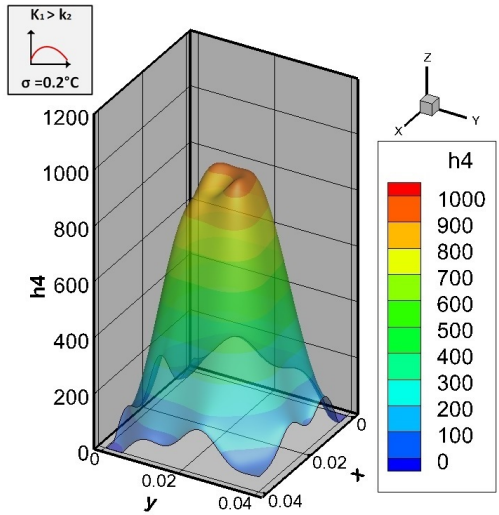
Tem-se as estimativas da condutância térmica de contato sem ruído apresentada na figura B.23b, com ruído com  $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$  apresentada na figura B.23c e, com ruído com  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$  apresentada na figura B.23d. Note que, no caso 12 a estimativa fica muito próxima do perfil exato (ver figura B.23a). No caso 24, a estimativa apresenta oscilações devido as oscilações apresentadas na estimativa do fluxo de calor para este caso (ver figura B.22c). Por fim, o caso 36 está em boa concordância com o exato mesmo tendo desvio-padrão maior que o caso 24, isso se deve a escolha do parâmetro de truncamento.



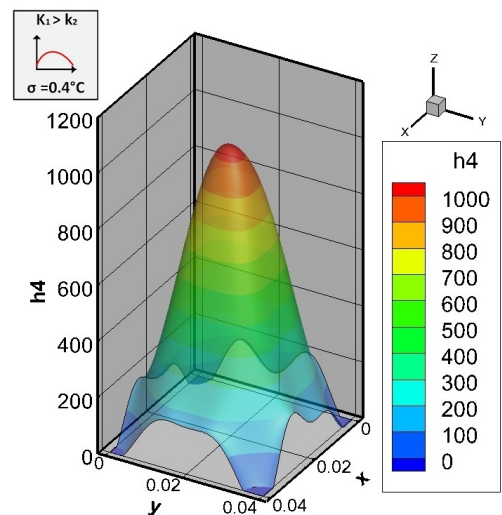
(a) Exato.



(b) Estimado sem ruído - Caso 12.



(c) Estimado ( $\sigma = 0.2^\circ\text{C}$ ) - Caso 24.



(d) Estimado ( $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$ ) - Caso 36.

Figura B.23: Condutância térmica de contato ( $\text{W}/\text{m}^2\text{C}$ ) - Perfil 4 - Configuração 3.

A figura B.24 apresenta o resíduo para os casos 24 e 36. Os resíduos possuem o mesmo comportamento apresentado nos casos 22, 23, 34 e 35 (ver figura B.16 e B.20)

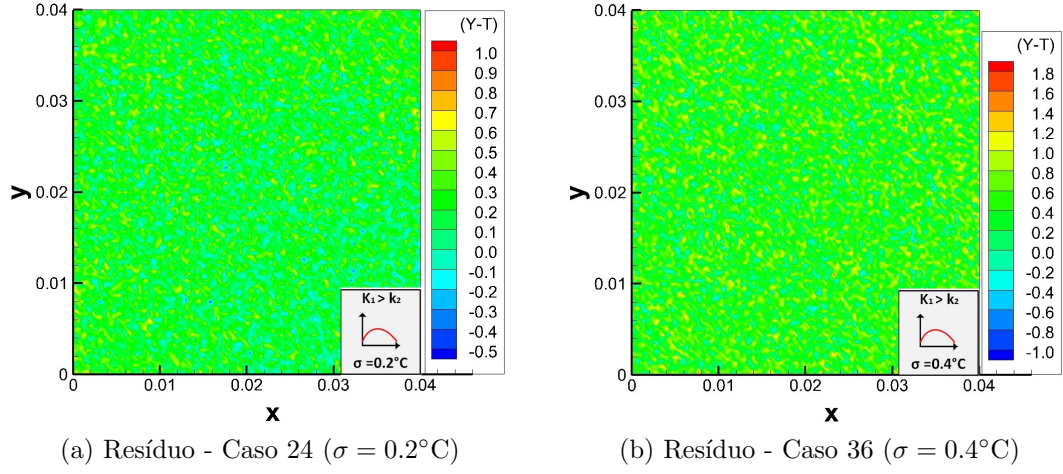


Figura B.24: Resíduo ( $Y - T$ ) - Perfil 4 - Configuração 3.



# Apêndice C

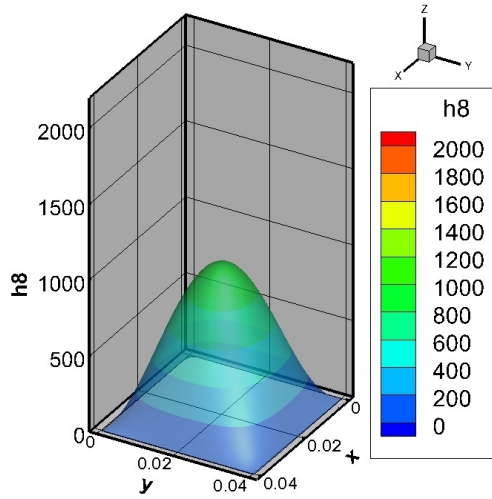
Neste apêndice serão apresentadas as estimativas do perfil 8, com a abordagem 2 e com os diferentes níveis de ruído nas medidas.

## Estimativa do Perfil 8 - $\sigma = 0^\circ\text{C}$

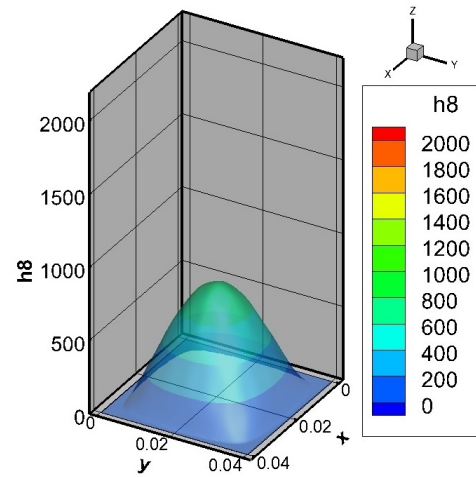
### Metodologia 1

Primeiramente será analisado o caso sem ruído na medidas. A figura C.1 apresenta a estimativa da condutância térmica de contato utilizando a metodologia 1 com 15 funções em cada direção. Note que com o aumento do número de medidas de temperatura é possível observar que a estimativa se aproxima mais do perfil exato apresentado na figura C.1a.

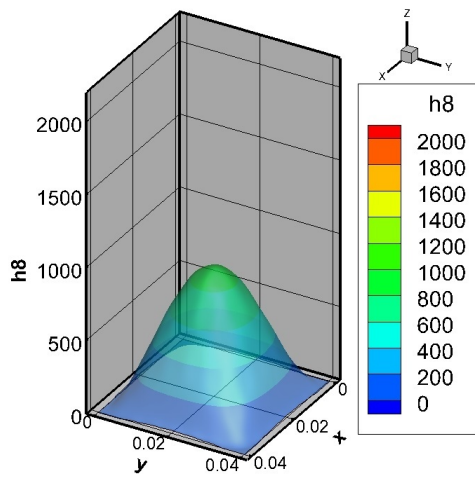
Isto é confirmado pela figura (C.2), onde após 300 segundos, o erro entre as estimativas já são menores que  $10^{-4}$ . A figura C.3 que apresenta o erro RMS das estimativas também confirma este comportamento. Mostrando que aumentando o número de medidas, a estimativa está mais próxima do perfil exato.



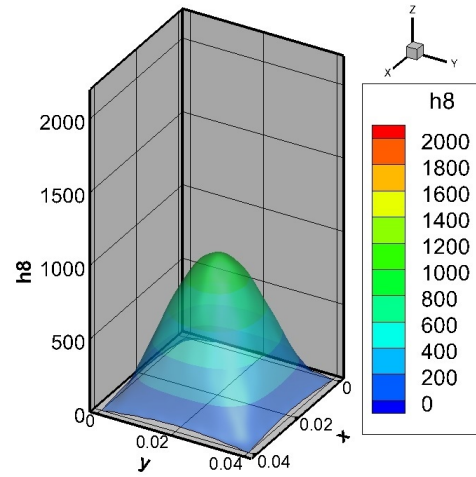
(a) Condutância térmica de contato exata (W/m<sup>2</sup>°C) - Perfil 8



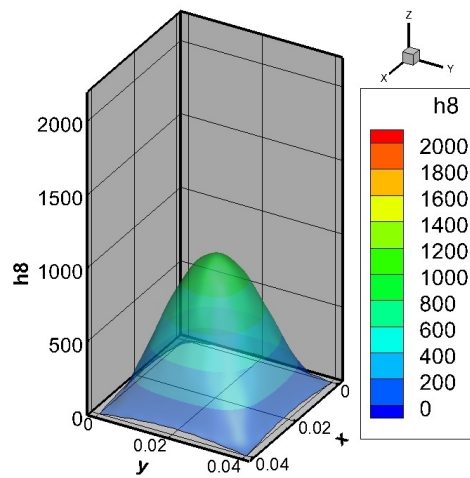
(b) Estimada com 15 funções - 50s - Metodologia 1.



(c) Estimada com 15 funções - 100s - Metodologia 1.



(d) Estimada com 15 funções - 300s - Metodologia 1.



(e) Estimada com 15 funções - 600s - Metodologia 1.

Figura C.1: Condutância térmica de contato (W/m<sup>2</sup>°C) - Perfil 8 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 1 - 15 funções.

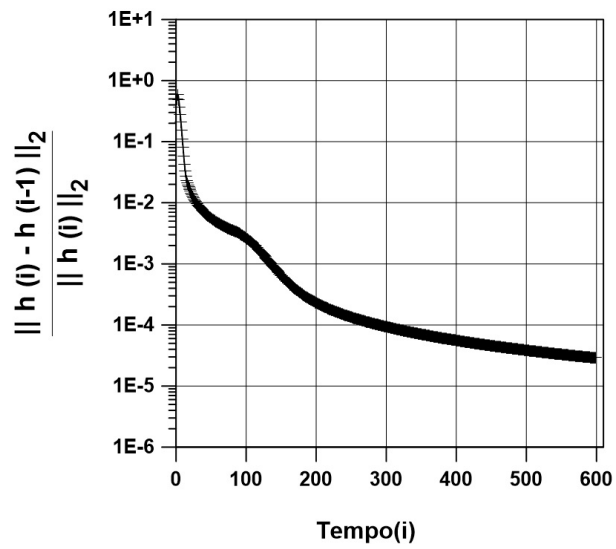


Figura C.2: Convergência da estimativa - Perfil 8 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 1 - 15 funções.

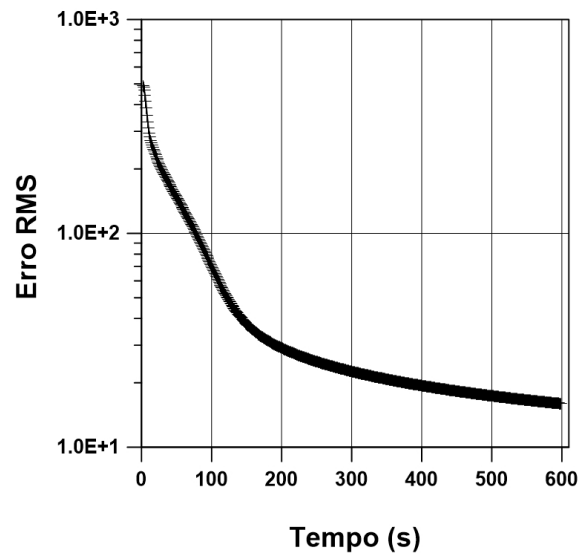


Figura C.3: Erro RMS - Perfil 8 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 1 - 15 funções.

A figura C.4 apresenta os erros calculados através da Eq. (5.11). Note que os erros são bem menores que os erros do perfil 7 e que conforme mais medidas de temperatura são utilizadas, o erro diminui.

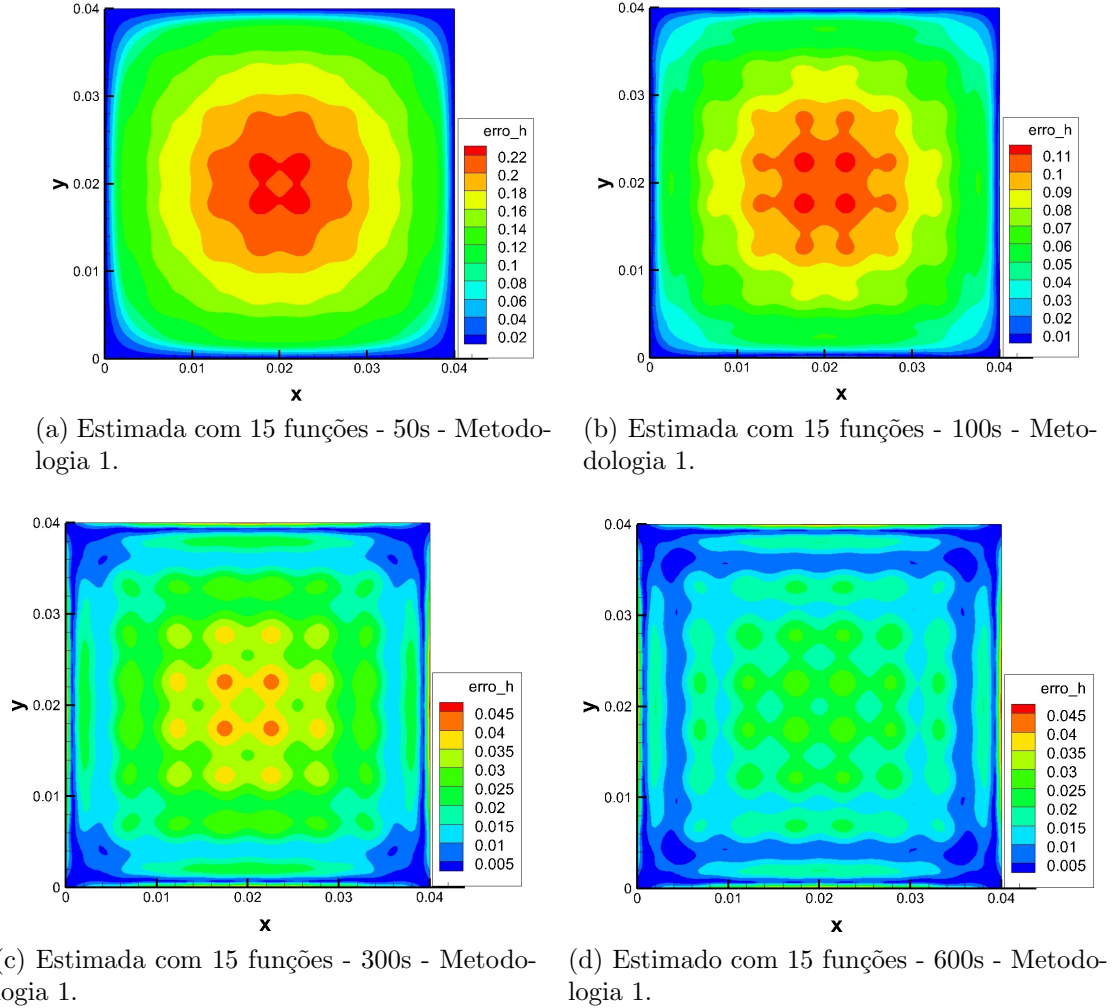
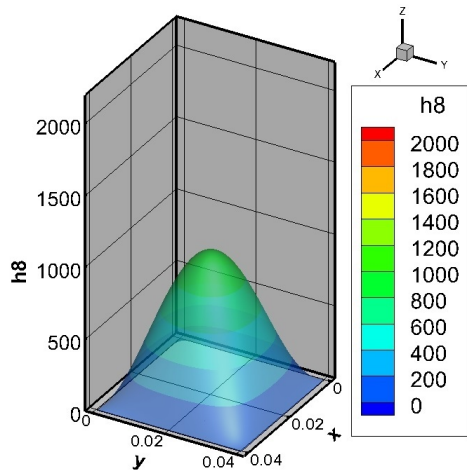


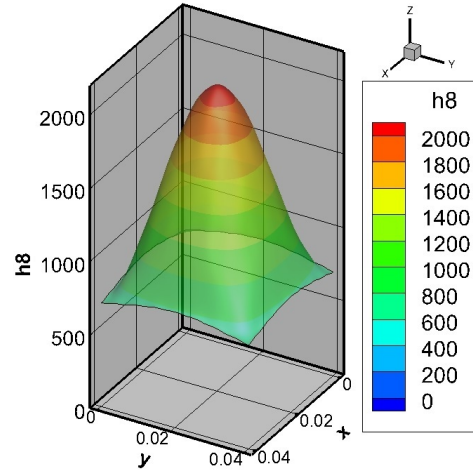
Figura C.4: Erro - Perfil 8 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 1 - 15 funções.

## Metodologia 2

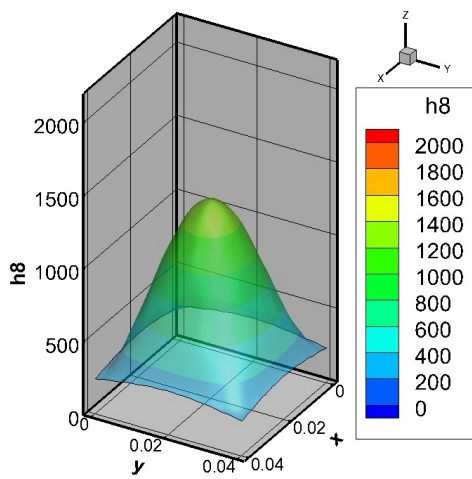
A figura C.5 apresenta a estimativa da condutância térmica de contato utilizando a metodologia 2 com 15 funções em cada direção. A figura C.6 apresenta a convergência da estimativa. Note que com o aumento do número de medidas de temperatura é possível observar que a estimativa se aproxima mais do perfil exato apresentado na figura C.5a. Isto pode ser confirmado analisando a figura (C.7), que apresenta o erro RMS. Note que é possível obter uma convergência com 400 medidas de temperatura.



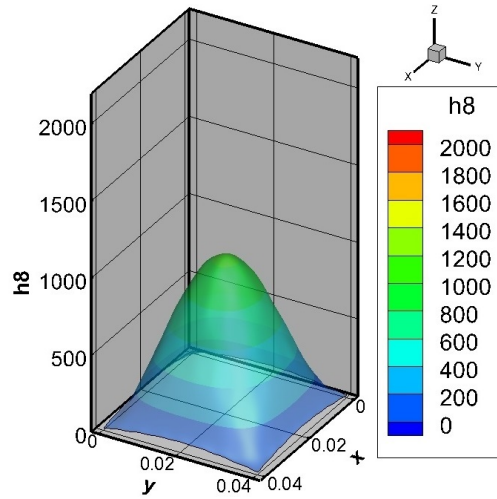
(a) Condutância térmica de contato exata (W/m<sup>2</sup>°C) - Perfil 8



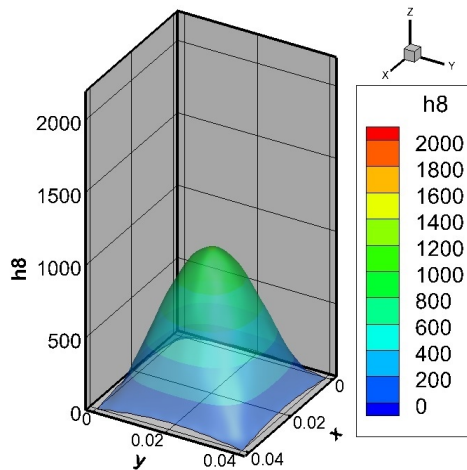
(b) Estimada com 15 funções - 50s - Metodologia 2.



(c) Estimada com 15 funções - 100s - Metodologia 2.



(d) Estimada com 15 funções - 300s - Metodologia 2.



(e) Estimada com 15 funções - 600s - Metodologia 2.

Figura C.5: Condutância térmica de contato (W/m<sup>2</sup>°C) - Perfil 8 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

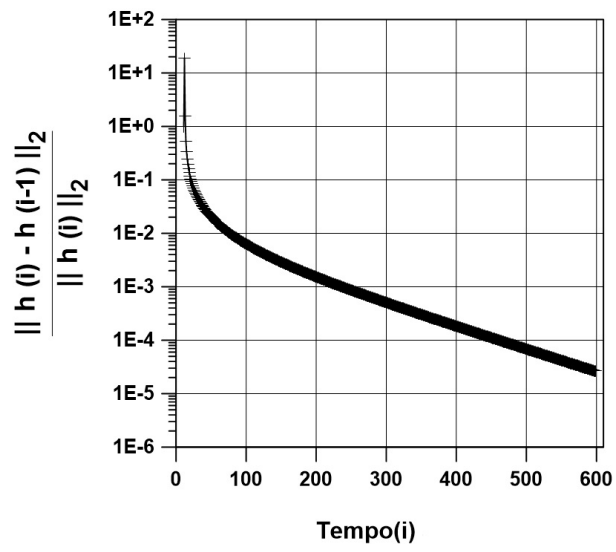


Figura C.6: Convergência da estimativa - Perfil 8 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

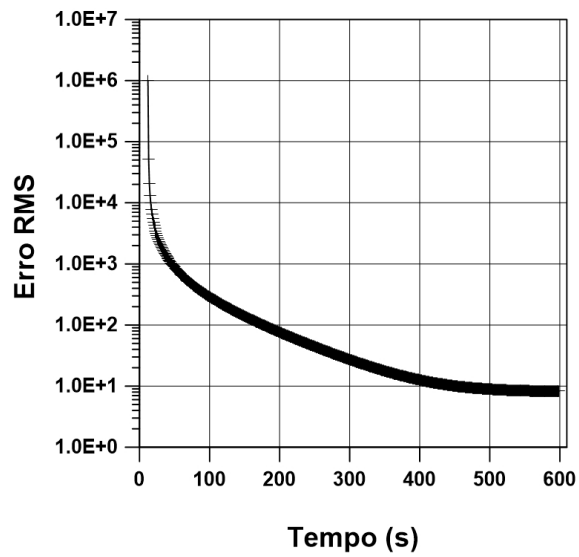


Figura C.7: Erro RMS - Perfil 8 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

A figura C.8 apresenta os erros calculados através da Eq. (5.11). Note que os erros são bem menores que os erros do perfil 7 e que conforme mais medidas de temperatura são utilizadas, o erro diminui.

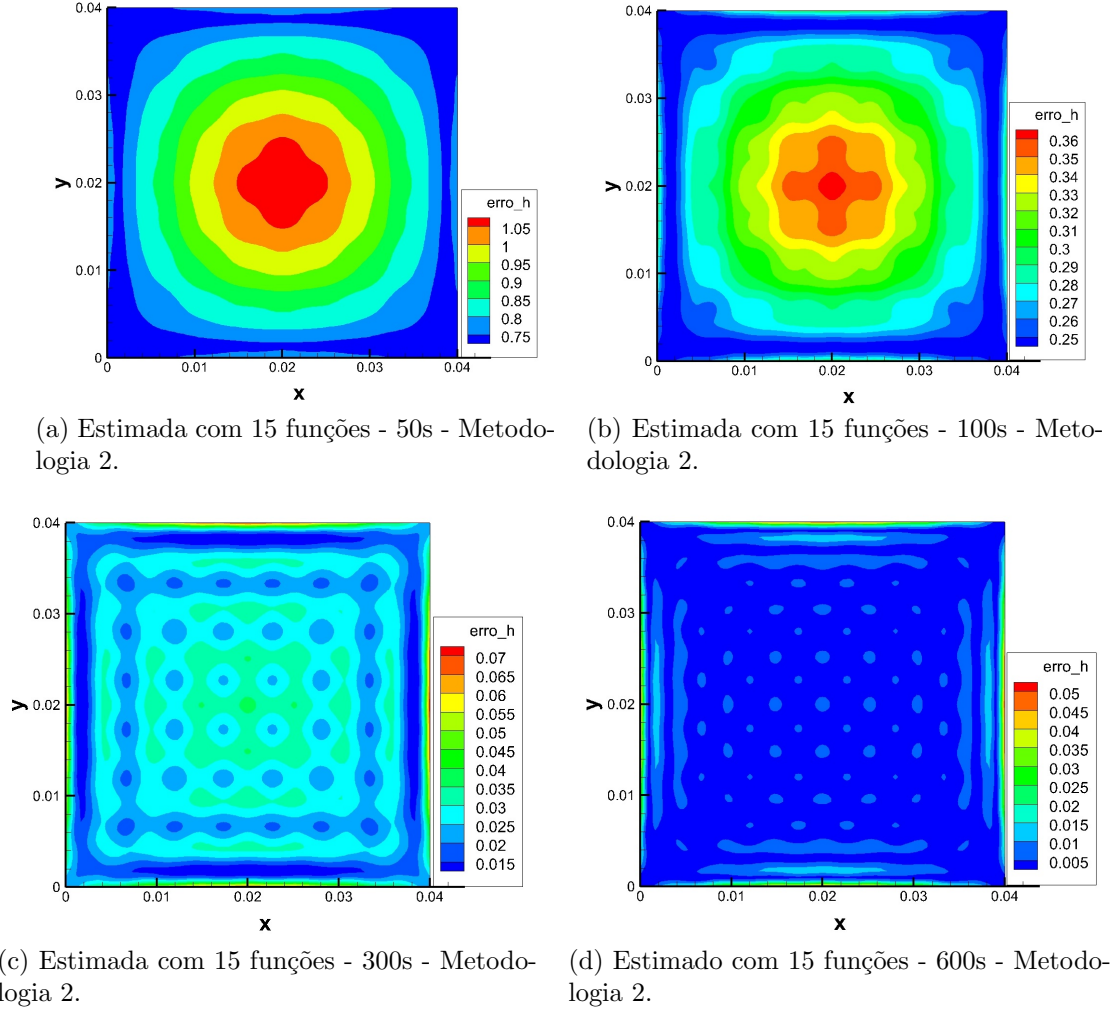


Figura C.8: Erro - Perfil 8 -  $\sigma = 0^\circ\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

A tabela C.1 apresenta o tempo computacional para a estimativa dos casos anteriores, isto é, com perfil 8, sem ruído nas medidas e utilizando a metodologia 1 e 2. Note que o tempo computacional utilizando a metodologia 2 é muito mais baixo, o que era esperado.

Tabela C.1: Tempo Computacional - Perfil 8 -  $\sigma = 0^{\circ}\text{C}$  - 15 funções.

<b>Tempo Computacional</b>	
Caso	tempo (segundos)
<b>Metodologia 1 - 15 funções - 50s</b>	6866.31
<b>Metodologia 1 - 15 funções - 100s</b>	13538.98
<b>Metodologia 1 - 15 funções - 300s</b>	40177.68
<b>Metodologia 1 - 15 funções - 600s</b>	79783.37
<b>Metodologia 2 - 15 funções - 50s</b>	156.67
<b>Metodologia 2 - 15 funções - 100s</b>	282.52
<b>Metodologia 2 - 15 funções - 300s</b>	791.34
<b>Metodologia 2 - 15 funções - 600s</b>	1548.34



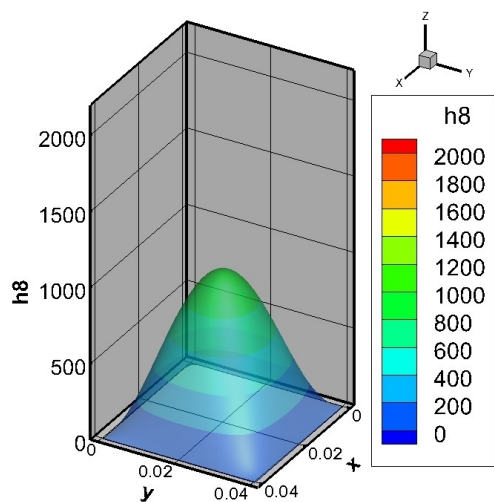
### **Estimativa do Perfil 8 - $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$**

Para o perfil 8 com ruído  $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$  nas medidas será apresentado somente a metodologia 2. A figura C.9 mostra as estimativas nos tempos 50, 100, 300 e 600 segundos. As figuras C.10 e C.11 apresentam a convergência das estimativas e o erro RMS, respectivamente. A figura C.12 apresenta os erros calculados através da Eq. (5.11).

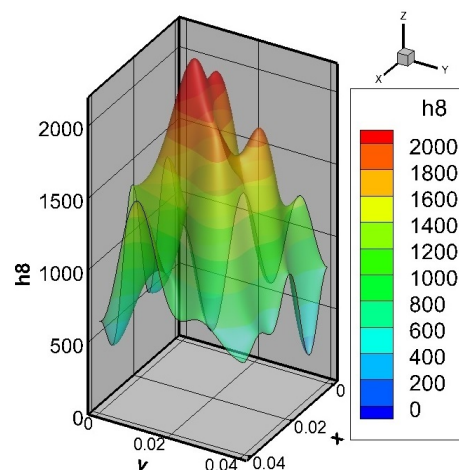
Pode-se notar que com 50 medidas de temperatura a estimativa é muito ruim. Ao aumentar o número de medidas, as estimativas melhoram e ficam com uma razoável concordância com o perfil exato mostrado na figura C.1a. Deve-se ressaltar que a escolha do parâmetro de truncamento foi realizada no regime permanente e utiliza-se neste caso para cada passo no tempo, o que pode influenciar na qualidade dos resultados.

Apesar das figuras que analisam a convergência mostrarem que a partir de 300 segundos as estimativas já estão bem próximas entre si, pode-se claramente notar diferenças entre as figuras C.9d e C.9e.

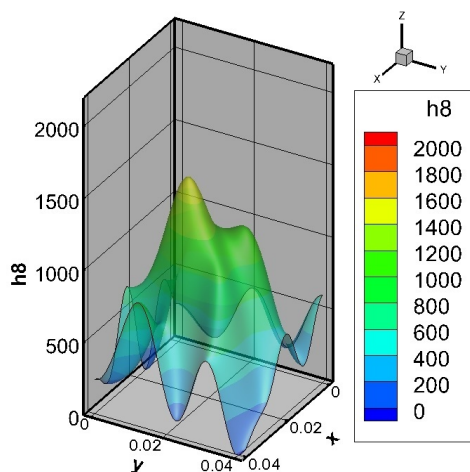
A figura C.12 mostra as oscilações presentes nas estimativas que não ficam muito claras ao analisar só a figura C.9. Apesar os erros serem menores que no perfil 7, há muita oscilação que pode ser devido à escolha do parâmetro de truncamento e deve ser melhor investigado.



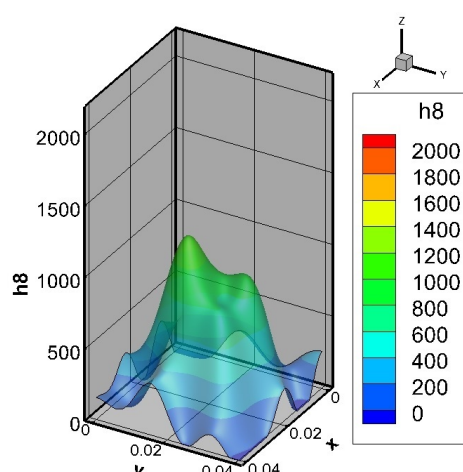
(a) Condutância térmica de contato exata ( $\text{W/m}^2\text{°C}$ ) - Perfil 8



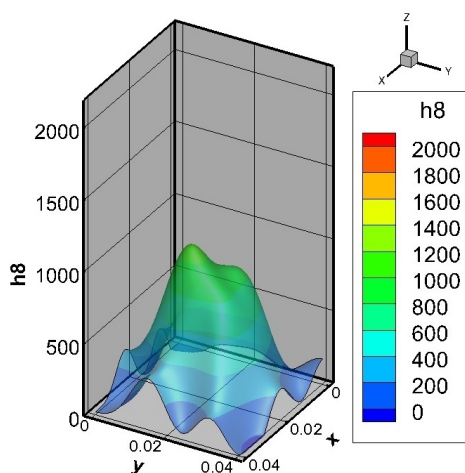
(b) Estimada com 15 funções - 50s - Metodologia 2.



(c) Estimada com 15 funções - 100s - Metodologia 2.



(d) Estimada com 15 funções - 300s - Metodologia 2.



(e) Estimada com 15 funções - 600s - Metodologia 2.

Figura C.9: Condutância térmica de contato ( $\text{W/m}^2\text{°C}$ ) - Perfil 8 -  $\sigma = 0.4\text{°C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

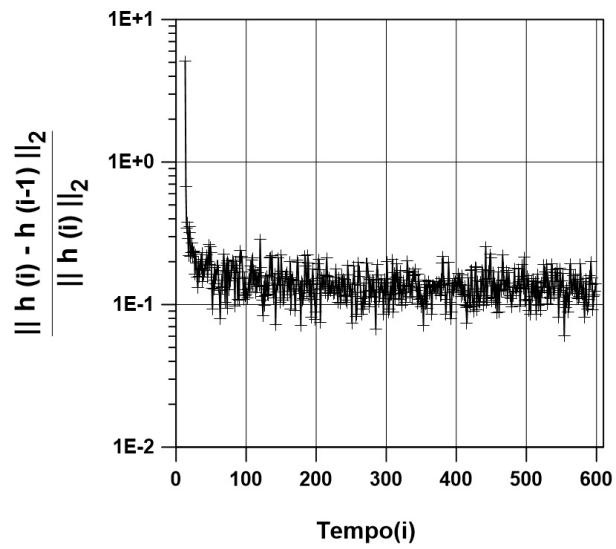


Figura C.10: Convergência da estimativa - Perfil 8 -  $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.

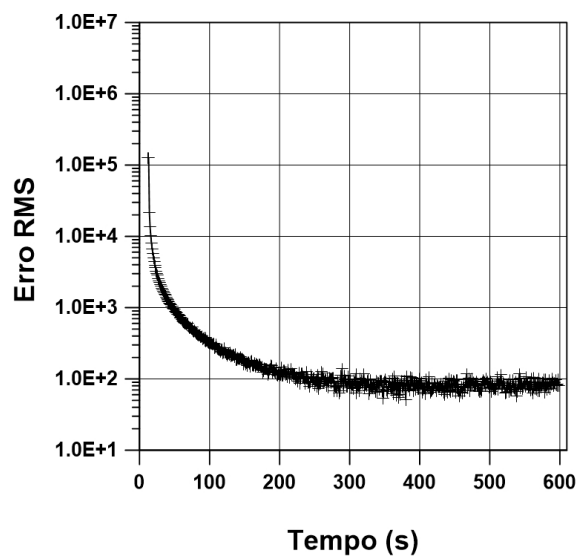
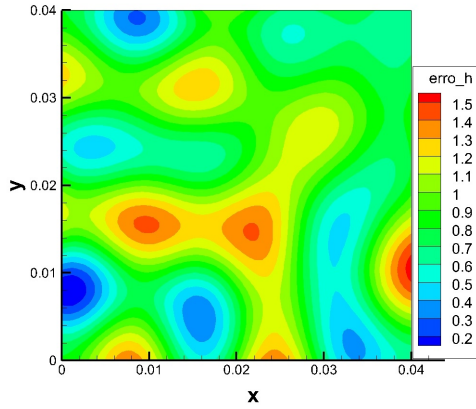
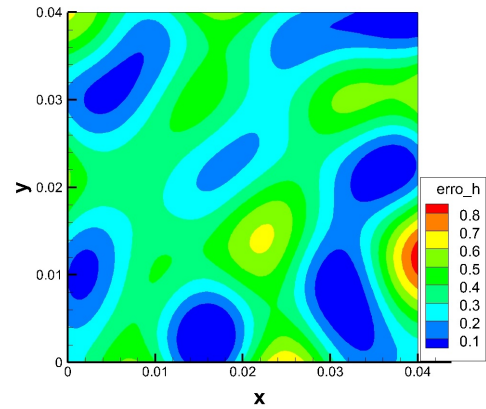


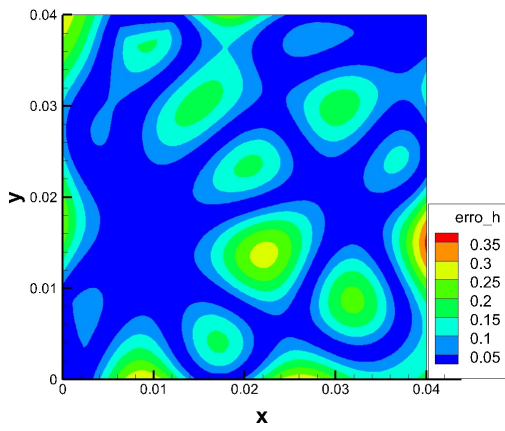
Figura C.11: Erro RMS - Perfil 8 -  $\sigma = 0.4^{\circ}\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.



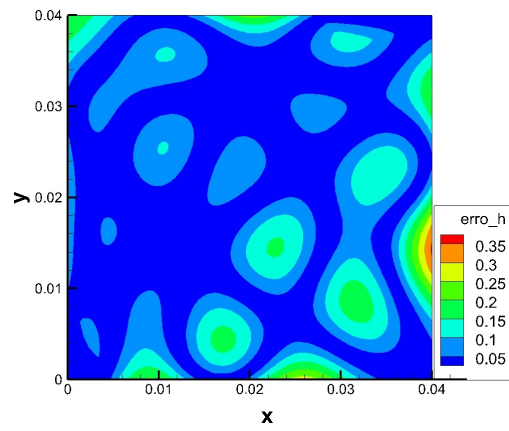
(a) Estimada com 15 funções - 50s - Metodologia 2.



(b) Estimada com 15 funções - 100s - Metodologia 2.



(c) Estimada com 15 funções - 300s - Metodologia 2.



(d) Estimado com 15 funções - 600s - Metodologia 2.

Figura C.12: Erro - Perfil 8 -  $\sigma = 0.4^\circ\text{C}$  - Metodologia 2 - 15 funções.